**32** ('09 筑波大) 【難易度】… 標準

以下の問いに答えよ.

(1) 等式 $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ を示せ.

(2) $2\cos 80^\circ$ は 3 次方程式 $x^3 - 3x + 1 = 0$ の解であることを示せ.

(3) $x^3 - 3x + 1 = (x - 2\cos 80^\circ)(x - 2\cos\alpha)(x - 2\cos\beta)$ となる角度 $\alpha,\ \beta$ を求めよ. ただし, $0^\circ < \alpha < \beta < 180^\circ$ とする.

**【テーマ】: 高次方程式と三角関数**

方針

(1) は, 加法定理を用いれば容易に示せます. (2) は, (1) の結果を利用します. $\theta = 80^\circ$ としてみると …. (3) は, (2) と同様にして他の解を導きます. $f(x) = x^3 - 3x + 1$ とおいて, $f(2\cos\theta)$ を考えます.

---

**解答**

(1) **【証明】**

加法定理より,

$$\begin{aligned}\cos 3\theta &= \cos(2\theta + \theta)\\ &= \cos 2\theta\cos\theta - \sin 2\theta\sin\theta\\ &= (2\cos^2\theta - 1)\cos\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta\\ &= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2(1 - \cos^2\theta)\cos\theta\\ &= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta\end{aligned}$$

ゆえに, 示された. **(証明終)**

(2) **【証明】**

$\theta = 80^\circ$ とすると,

$$\cos 3\theta = \cos 240^\circ = -\frac{1}{2}$$

である. よって, (1) の結果から,

$$\cos 240^\circ = 4\cos^3 80^\circ - 3\cos 80^\circ$$

$$-\frac{1}{2} = 4\cos^3 80^\circ - 3\cos 80^\circ$$

$$8\cos^3 80^\circ - 6\cos 80^\circ + 1 = 0$$

$x = 2\cos 80^\circ$ とおくと,

$$x^3 - 3x + 1 = 0$$

となる. ゆえに, $x = 2\cos 80^\circ$ は 3 次方程式 $x^3 - 3x + 1 = 0$ の解であることが示された. **(証明終)**

(3)　$f(x)=x^3-3x+1$ とおくと，

$$
\begin{aligned}
f(2\cos\theta)&=8\cos^3\theta-6\cos\theta+1\\
&=2(4\cos^3\theta-3\cos\theta)+1\\
&=2\cos 3\theta+1
\end{aligned}
$$

よって，$f(2\cos\theta)=0$ となるのは，$\cos 3\theta=-\dfrac{1}{2}$ のときであり，$0^\circ<\theta<180^\circ$ のとき，$0^\circ<3\theta<540^\circ$ より，

$$3\theta=120^\circ,\ 240^\circ,\ 480^\circ \quad\Longleftrightarrow\quad \theta=40^\circ,\ 80^\circ,\ 160^\circ$$

$0^\circ<\alpha<\beta<180^\circ$ かつ $\alpha\fallingdotseq 80^\circ$，$\beta\fallingdotseq 80^\circ$ より，

$\boldsymbol{\alpha=40^\circ}$**，**$\boldsymbol{\beta=160^\circ}$**……(答)**

◇　♡

$\boxed{\text{解説}}$

3 次方程式の解を三角関数で表そうという問題です．加法定理の応用ということで出題されます．(1) は，3 倍角の公式なので楽勝でしょう．(2) は，$\theta=80^\circ$ であることと $3\theta=240^\circ$ であることから，方針が見えてきます．(3) は，(2) と同様に考えれば，結局 $\cos 3\theta=-\dfrac{1}{2}$ になればよいということになるので，これに気付けば解けるでしょう．少し経験がないと後半は難しく感じる問題ですが，この問題はまだ易しい方です．少し古い問題だと 1975 年九州大学・1996 年京都大学で出題されていて，最近では 2013 年東北大学・筑波大学・横浜国立大学など，多くの大学で類題が出題されています．解法をしっかりと理解しておき類題が出題されても解けるようにしておきましょう．