31 （'11　岡山大）　**【難易度】** … 標準

$f(x)=e^{-x^2}$ とする．曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ における接線を ℓ，原点 O を通り ℓ に垂直な直線を ℓ' とし，ℓ と ℓ' との交点を P とする．

（1）　線分 OP の長さを求めよ．

（2）　ℓ と y 軸との交点を Q とし，$\angle\mathrm{POQ}$ を $\theta\ (0\leqq\theta\leqq\pi)$ とする．$\sin\theta$ を a を用いて表せ．

（3）　(2) で求めた $\sin\theta$ を最大にする a の値と，そのときの $\sin\theta$ の値を求めよ．

【テーマ】：接線と最大・最小

方針

(1) は，OP の長さが原点と接線 ℓ との距離であることに気付けるかどうかで計算量がかなり変わってきます．
(2) は，三角比を利用して計算してもよいですし，傾きと $\tan\theta$ の関係を利用しても求められます．(3) は，$\sin\theta$ の中を丸ごと新しい関数と考えてもよいですし，分母だけに a を集めて部分的な最小値を考えることもできます．

♣ ♠

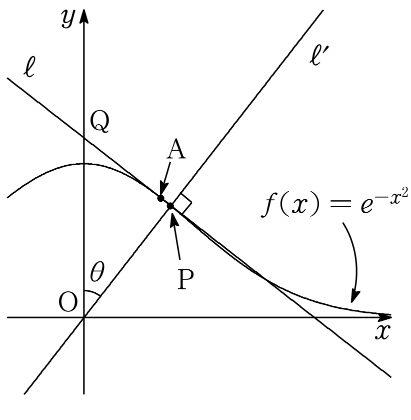
解答

（1）　$f'(x)=-2xe^{-x^2}$ より，点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ における接線 ℓ の方程式は，

$$y=-2ae^{-a^2}(x-a)+e^{-a^2} \iff y=-2ae^{-a^2}x+(2a^2+1)e^{-a^2}$$

である．題意より，OP の長さは，原点と直線 ℓ との距離に等しいので，

$$\mathrm{OP}=\frac{\left|-(2a^2+1)e^{-a^2}\right|}{\sqrt{\left(2ae^{-a^2}\right)^2+1^2}}=\boldsymbol{\frac{(2a^2+1)e^{-a^2}}{\sqrt{4a^2e^{-2a^2}+1}}}\cdots\cdots(\text{答})$$



（2）　直線 ℓ' の傾きは，$\dfrac{1}{2ae^{-a^2}}$ であるから，

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{1}{2ae^{-a^2}} \iff \frac{1}{\tan\theta}=\frac{1}{2ae^{-a^2}}$$

である．一方，$1+\dfrac{1}{\tan^2\theta}=\dfrac{1}{\sin^2\theta}$ であるから，

$$1+\frac{1}{4a^2e^{-2a^2}}=\frac{1}{\sin^2\theta} \iff \frac{4a^2e^{-2a^2}+1}{4a^2e^{-2a^2}}=\frac{1}{\sin^2\theta}$$

$$\sin^2\theta=\frac{4a^2e^{-2a^2}}{4a^2e^{-2a^2}+1}=\frac{4a^2}{4a^2+e^{2a^2}}$$

$0\leqq\theta\leqq\pi$ より，$\sin\theta\geqq0$ であるから，

$$\sin\theta=\boldsymbol{\frac{2|a|}{\sqrt{4a^2+e^{2a^2}}}}\cdots\cdots(\text{答})$$

（3）　(2) より，$a\neq0$ のとき，

$$\sin\theta=\sqrt{\frac{4a^2}{4a^2+e^{2a^2}}}=\sqrt{\frac{4}{4+\dfrac{e^{2a^2}}{a^2}}}$$

と変形できるので，$g(a)=\dfrac{e^{2a^2}}{a^2}$ とおくと，$\sin\theta$ が最大となるのは，$g(a)$ が最小になるときである．

$$g'(a)=\frac{4ae^{2a^2}\cdot a^2-e^{2a^2}\cdot 2a}{a^4}=\frac{2(2a^2-1)e^{2a^2}}{a^3}$$

より，$g'(a)=0$ のとき，$a=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ であり，$y=g(a)$ のグラフは，y 軸に関して対称であるから，$x>0$ で増減表を考えると，次のようになる．

a	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$
$g'(a)$		$-$	0	$+$
$g(a)$		$\searrow$		$\nearrow$

$g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{e}{\frac{1}{2}}=2e$ であるから，対称性を考慮して，$a=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，$g(a)$ は最小値 $2e$ をとる．このとき，

$$\sin\theta=\sqrt{\frac{4}{4+2e}}=\sqrt{\frac{2}{e+2}}$$

より，$\sin\theta$ は最小値 $\sqrt{\frac{2}{e+2}}$ をとる．以上より，求める $\sin\theta$ の最小値とそのときの a の値は，

最小値：$\boldsymbol{\sqrt{\frac{2}{e+2}}\quad\left(a=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$……**(答)**

である．

◇ ♡

解説

(1) は，接線の方程式を求め，さらに法線の方程式を求めて接線の方程式と連立させ，点 P の座標を求めて原点との距離を考えると膨大な計算量になってしまいます．簡単なグラフをかいて状況を把握できれば，原点と直線 ℓ の距離が OP であることは容易にわかります．方針の立て方で大きく計算量が変わるので注意しましょう．

(2) は，出題者の意図を考えれば，(1) で OP の長さを求めさせているので，△OPQ で三角比を用いて $\sin\theta$ を求めるのでしょう．ただし，直接 $\sin\theta$ を出すのは大変なので，$\cos\theta=\frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OQ}}$ から $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$ を用いて求めましょう．解答では，傾きと $\tan\theta$ の関係を用いて求めてみました．これは，$\tan\theta$ と $\sin\theta$ の関係式があるのでそれを使おうという意図があるからです．その関係式は，

$$1+\frac{1}{\tan^2\theta}=\frac{1}{\sin^2\theta}$$

です．この関係式は，$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ の両辺を $\sin^2\theta$ で割れば導かれます．$1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$ と導出方法が同じなので，知らなくても導くことはできるようにしておきましょう．

(3) は，$g(a)=\frac{4a^2}{4a^2+e^{2a^2}}$ とおいて微分しても求めることができますが，計算がやや面倒なので，先に分子分母を a^2 で割って考えました．ただし，$a\neq 0$ でないと割れませんので注意して下さい．$g(a)=\frac{4a^2}{4a^2+e^{2a^2}}$ のまま計算するのであれば，$2a^2=t$ とおいて，$h(t)=\frac{2t}{2t+e^t}$ $(t\geqq 0)$ とする方が計算が少し楽になるのでよいでしょう．