30 （'03 金沢大） 【難易度】 … 標準

x の 3 次関数 $f(x)=x^3-kx^2+4k$ について，以下の問いに答えよ．

（1） $x \geqq 0$ のときつねに $f(x) \geqq 0$ となるような定数 k の値の範囲を求めよ．

（2） $y=f(x)$ のグラフが k の値によらずに通る 2 つの点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$, $\mathrm{B}(b,\ f(b))$ $(a<b)$ を求めよ．さらに，$a<x<b$ のときつねに $y=f(x)$ のグラフが線分 AB よりも上にあるような定数 k の値の範囲を求めよ．

【テーマ】：微分法の不等式への応用

方針

(1) は，$x \geqq 0$ で常に $f(x) \geqq 0$ となるので，$x \geqq 0$ における最小値が 0 以上になるときを考えます．(2) は k についての恒等式を考えて定点を求めます．

♣ ♠

解答

（1） $f'(x)=3x^2-2kx=x(3x-2k)$ である．ここで，$f(0)=4k$ であるから，$x \geqq 0$ で常に $f(x) \geqq 0$ となるためには，$k \geqq 0$ であることが必要である．

(i) $k=0$ のとき，$x \geqq 0$ で $f'(x) \geqq 0$ となるので，$f(x)$ は単調増加である．よって，題意を満たす．

(ii) $k>0$ のとき，$f'(x)=0$ を満たす x の値は，$x=0,\ \dfrac{2}{3}k$ であるから，増減表は次のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}k$	$\cdots$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$

ゆえに，$x \geqq 0$ における最小値は

$$f\left(\frac{2}{3}k\right)=\frac{8}{27}k^3-\frac{4}{9}k^3+4k=-\frac{4}{27}k^3+4k$$

である．したがって，題意を満たすためには，$f\left(\dfrac{2}{3}k\right) \geqq 0$ であればよいので，

$$-\frac{4}{27}k^3+4k \geqq 0 \iff k(k^2-27) \leqq 0$$

$k>0$ であるから，$k^2-27 \leqq 0$ となるので，$0<k \leqq 3\sqrt{3}$ である．

(i), (ii) より，求める k の値の範囲は，

$$\boldsymbol{0 \leqq k \leqq 3\sqrt{3}}\cdots\cdots\textbf{（答）}$$

である．

（2） $y=x^3-kx^2+4k$ を k について整理すると，

$$(x^2-4)k+y-x^3=0$$

となる．k の値によらないので，k についての恒等式となるとき，

$$x^2-4=0 \text{ かつ } y-x^3=0$$

$$\therefore\ (x,\ y)=(2,\ 8),\ (-2,\ -8)$$

ゆえに，$a = -2, b = 2$ であり，定点の座標は，A$(-2, -8)$, B$(2, 8)$ となる．

直線 AB の方程式は，$y = 4x$ となるので題意より，$-2 < x < 2$ において

$$x^3 - kx^2 + 4k > 4x \iff x^3 - kx^2 - 4x + 4k > 0$$

が成り立てばよい．すなわち，

$$g(x) = x^3 - kx^2 - 4x + 4k$$

とおくと，$-2 < x < 2$ において，常に $g(x) > 0$ となればよい．

$$g(x) = (x^2 - 4)(x - k)$$

であり，$-2 < x < 2$ より，$x^2 - 4 < 0$ であるから，$-2 < x < 2$ で常に $x - k < 0$ となればよい．
$y = x - k$ のグラフは単調増加なので，題意を満たすための条件は，

$$2 - k < 0 \iff \boldsymbol{k > 2}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

である．

―――――――――― ♢ ―――――――――― ♡ ――――――――――

解説

(1) は，必要条件を求めていますが，$k < 0, k = 0, k > 0$ と 3 通りに場合分けをして $k < 0$ のときは不適としても構いません．基本的な問題なので，完答できるようにしておきましょう．

(2) は，まず定点を発見することから始めます．文字 k を含む関数のグラフが定点を通るかどうかを調べるためには，グラフの方程式をその文字 k についての恒等式と考えて解きます．(x, y) の組が存在すればそれが定点の座標ですが，(x, y) の組が存在しなければ，定点も存在しません．定点が求まれば，直線 AB の方程式が求められるので，$g(x)$ が作れます．解答にもあるように $-2 < x < 2$ で常に $g(x) > 0$ であることを示すのですが，本問では因数分解によって，符号がわかる因数が存在したので比較的容易に k の値の範囲が求められました．もしも，因数分解ができなければ (1) と同様にして，$-2 < x < 2$ における最小値が常に正となるような k の値の範囲を求めればよいのです．もちろん，因数分解に気付かなくてもこの方法で解答できなければいけません．

