29 （'99 富山医科薬科大） 【難易度】 … やや難

円 $C : x^2+y^2-2x=0$ 上の点 $(2, 0)$ における接線を l とする．原点 O と円 C 上の点 P（ただし，P $\neq$ O とする）とを通る直線 OP と接線 l との交点を Q とする．線分 OQ 上に OR $=$ PQ となる点 R をとる．点 P が C 上 $y \geqq 0$ の部分を動くとき，点 R の描く曲線を D とする．

(1) x 軸の正の部分と直線 OP のなす角を θ とおき，R の座標を (s, t) とするとき，s, t を θ を用いて表せ．

(2) t^2 を s を用いて表せ．

(3) 曲線 D と円 C との，原点以外の交点 (x_0, y_0) を求めよ．

(4) 曲線 D，直線 $x=x_0$，および x 軸で囲まれる図形を K とする．

(a) K を x 軸の周りに回転して得られる回転体の体積を求めよ．

(b) K の面積を求めよ．

【テーマ】：面積と回転体の体積

方針

(1) は，三角比を用いると OP, OQ の長さが容易に計算できます．(2) は，(1) において θ を消去します．(3) は，交点を求めるので連立方程式を解きます．(4) は，前半は分母を置換し，後半は，(1) で求めた関係式を用いて置換します．

♣ ♠

解答

(1) A$(2, 0)$ とする．△OAP と △OAQ はともに直角三角形であり，∠POA $=\theta$ であるから，

$$\mathrm{OP}=2\cos\theta,\ \mathrm{OQ}=\frac{2}{\cos\theta}$$

が成り立つ．よって，

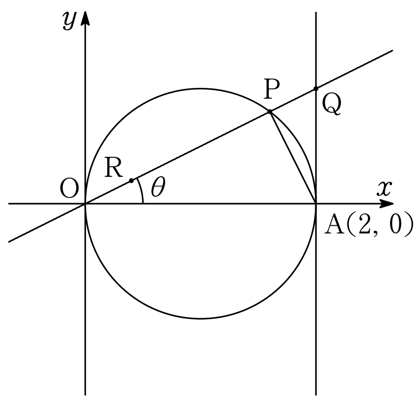
$$\mathrm{PQ}=\frac{2}{\cos\theta}-2\cos\theta=2\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}$$

となるので，$\mathrm{OR}=\dfrac{2\sin^2\theta}{\cos\theta}$ である．ここで，

$$s=\mathrm{OR}\cos\theta,\ t=\mathrm{OR}\sin\theta$$

と表せるので，

$$\boldsymbol{s=2\sin^2\theta,\ t=2\sin^2\theta\tan\theta}\cdots\cdots\textbf{(答)}$$



(2) (1) より，$t=s\tan\theta$ であるから，

$$\begin{aligned}t^2&=s^2\tan^2\theta\\&=s^2\left(\frac{1}{\cos^2\theta}-1\right)\\&=s^2\left(\frac{1}{1-\frac{s}{2}}-1\right)\\&=\boldsymbol{\frac{s^3}{2-s}}\cdots\cdots\textbf{(答)}\end{aligned}$$

(3) ${y_0}^2=\dfrac{{x_0}^3}{2-x_0}$ と ${x_0}^2+{y_0}^2-2x_0=0$ より，

$$2x_0-{x_0}^2=\frac{{x_0}^3}{1-x_0}$$

$x_0 \fallingdotseq 0$ より，$x_0 = 1$ を得る．このとき，$y_0 = 1$ であるから，

$(x_0,\ y_0) = (1,\ 1)$……(答)

(4)

(a) 求める体積を V とすると，

$$V = \pi\int_0^1 t^2\,ds = \pi\int_0^1 \frac{s^3}{2-s}\,ds$$

s	$0 \to 1$
x	$2 \to 1$

$x = 2-s$ とおくと，$dx = -ds$ であるから，

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_1^2 \frac{(2-x)^3}{x}\,dx \\ &= \pi\int_1^2\left(\frac{8}{x} - 12 + 6x - x^2\right)dx \\ &= \boldsymbol{8\pi\left(\log 2 - \frac{2}{3}\right)}\text{……(答)} \end{aligned}$$

(b) K 面積を S とすると，

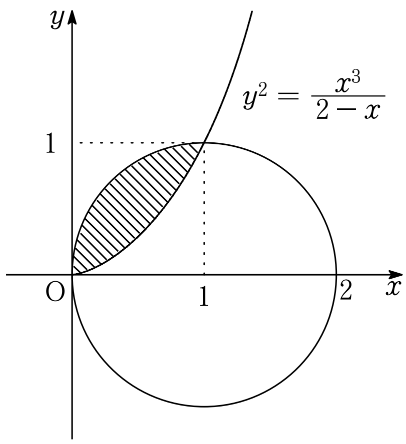
s	$0 \to 1$
θ	$0 \to \frac{\pi}{4}$

$$S = \int_0^1 t\,ds$$

(1) より，$t = 2\sin^2\theta\tan\theta,\ s = 2\sin^2\theta$ より，

$ds = 4\sin\theta\cos\theta\,d\theta$

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\sin^2\theta\tan\theta\cdot 4\sin\theta\cos\theta\,d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 8\sin^4\theta\,d\theta \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-\cos 2\theta)^2\,d\theta \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 - 2\cos 2\theta + \frac{1+\cos 4\theta}{2}\right)d\theta \\ &= \boldsymbol{\frac{3}{4}\pi - 2}\text{……(答)} \end{aligned}$$



◇ ♡

解説

(1) は，直線の方程式や 2 点間の距離を考えると計算が煩雑になるので三角比を利用して処理をしましょう．ちなみに，$s = 1-\cos 2\theta$，$t = (1-\cos 2\theta)\tan\theta$ でも正解です．

(2) は，(1) で求めた式において θ を消去するだけなのですが，三角関数の様々な関係式を思い浮かべて消去する必要があります．解答では，$1+\tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ と $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ を利用して θ を消去していますが，次の $\tan\theta$ と $\sin\theta$ の関係式を使って消去すれば一発です．

$$1 + \frac{1}{\tan^2\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta}$$

そんな関係式知らないよ！って人も結構いるのですが，$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ の両辺を $\sin^2\theta$ で割れば導かれます．$1+\tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ と導出方法が同じなので，知らなくても導くことはできるようにしておきましょう．

(3) は，連立方程式なので，y_0^2 を消去しましょう．

(4) は，体積と面積の計算ですが，体積の方は被積分関数が $\dfrac{s^3}{2-s}$ という形をしているので，分母が単項式になるような置換を考えます．面積は，$t = f(s)$ の形に直して積分するのは困難なので，(1) で求めている媒介変数表示されたものを利用します．

全体的にボリュームがあり，計算も大変ですが，様々な要素が詰まった良問なので，きちんと理解しておきましょう．

© 大学受験・数学塾　管理人：makoto