28 ('11 一橋大) 【難易度】… 標準

(1) 自然数 x, y は，$1 < x < y$ および

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)=\frac{5}{3}$$

をみたす．x, y の組をすべて求めよ．

(2) 自然数 x, y, z は，$1 < x < y < z$ および

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right)=\frac{12}{5}$$

をみたす．x, y, z の組をすべて求めよ．

【テーマ】：不定方程式

方針

与えられた方程式と x, y, z の大小関係から一番小さい文字 x のとり得る値の範囲を絞り込みます．

解答

(1) $1 < x < y$ より，$0 < \dfrac{1}{y} < \dfrac{1}{x} < 1$ であるから，

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right) < \left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

$$\frac{5}{3} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^2$$

$$\sqrt{\frac{5}{3}} < 1+\frac{1}{x} \iff 1 < x < \frac{\sqrt{15}+3}{2}$$

となる．$3 < \sqrt{15} < 4$ より，$3 < \dfrac{\sqrt{15}+3}{2} < \dfrac{7}{2}$ であるから，

$$x = 2, 3$$

を得る．

(i) $x = 2$ のとき，与えられた方程式は，

$$\frac{3}{2}\left(1+\frac{1}{y}\right)=\frac{5}{3} \iff y = 9$$

(ii) $x = 3$ のとき，与えられた方程式は，

$$\frac{4}{3}\left(1+\frac{1}{y}\right)=\frac{5}{3} \iff y = 4$$

ゆえに，求める自然数 x, y の組は，

$$\boldsymbol{(x, y) = (2, 9), (3, 4)} \cdots\cdots \textbf{(答)}$$

である．

(2) $1 < x < y < z$ より，$0 < \dfrac{1}{z} < \dfrac{1}{y} < \dfrac{1}{x} < 1$ である．よって，

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right) < \left(1+\frac{1}{x}\right)^3 \iff \frac{12}{5} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^3 \cdots\cdots ①$$

を得る．$x \geqq 3$ のとき，

$$\frac{12}{5} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^3 \leqq \left(1+\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{84}{27} = 2.37\cdots$$

となり，不成立であるから，$x=2$ のみが ① を満たす．このとき，与えられた方程式は，

$$\frac{3}{2}\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right) = \frac{12}{5} \iff \left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right) = \frac{8}{5} \cdots\cdots ②$$

である．したがって，$\frac{1}{z} < \frac{1}{y}$ より，

$$\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right) < \left(1+\frac{1}{y}\right)^2 \iff \frac{8}{5} < \left(1+\frac{1}{y}\right)^2 \cdots\cdots ③$$

$1<x<y$ であり，$x=2$ より，$y>2$ となる．同様にすると，③ を満たす 3 以上の自然数 y は，$y=3$ のみである．このとき，② から，

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right) = \frac{8}{5} \iff z=5$$

これは，$1<x<y<z$ を満たす．

ゆえに，求める自然数 x, y, z の組は，

$$\boldsymbol{(x, y, z) = (2, 3, 5)}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

である．

◇ ♡

解説

不定方程式の問題です．(1) は，等式を変形して (整数)×(整数)＝(整数) の形にしても解けますが，(2) では大変なので，x, y, z の大小関係を用いて絞込みを行います．よくある手法なので，確実に理解して使えるようにしておきましょう．(1) の別解を以下に記しておきます．

別解

(1) 両辺に $3xy$ をかけると，

$$3(x+1)(y+1) = 5xy \iff 2xy - 3(x+y) = 3 \iff (2x-3)(2y-3) = 15$$

と変形できる．ここで，$1<x<y$ より，$-1<2x-3<2y-3$ であるから，かけて 15 となる組合せは，

$$(2x-3,\ 2y-3) = (1,\ 15), (3,\ 5) \iff \boldsymbol{(x, y) = (2, 9), (3, 4)}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

(2) では，x のとり得る値の範囲を求めるため，まず $x=2, 3, \cdots$ と代入してどこで等式を満たさなくなるかを実験します．そうすると $x=3$ で成立しないことが分かるので，$x \geqq 3$ で不成立であることを示しています．同様に，y についても実験すればすぐに $y=3$ のときだけが ③ の不等式を満たすことが分かるでしょう．