27 （′94　神戸大） 【難易度】 … 標準

次の各問に答えなさい．

（1） 定積分
$$\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx\,,\quad \int_0^{\pi}\cos^2 x\,dx\,,\quad \int_0^{\pi}\sin x\cos x\,dx$$
の値を求めなさい．

（2） 関数 $f(x)$ が与えられたとき，定積分
$$\int_0^{\pi}(f(x)-a\sin x-b\cos x)^2\,dx$$
の値を最小にするような実数 $a,\,b$ の値を，
$$\int_0^{\pi}f(x)\sin x\,dx \text{ および } \int_0^{\pi}f(x)\cos x\,dx$$
を用いて表しなさい．

（3） 定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi}(x-a\sin x-b\cos x)^2\,dx$ の値を最小にするような実数 $a,\,b$ の値を求めなさい．

【テーマ】：定積分の最小値

方針

(1) は，半角の公式や 2 倍角の公式を用います．(2) は，$a,\,b$ に関する 2 変数関数の最小値問題ですから，$a,\,b$ に関して整理します．(3) は，(2) で $f(x)=x$ としたものです．

解答

(1)
$$\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx=\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}\,dx=\left[\,\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x\,\right]_0^{\pi}=\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}\cdots\cdots(\text{答})$$
$$\int_0^{\pi}\cos^2 x\,dx=\int_0^{\pi}\frac{1+\cos 2x}{2}\,dx=\left[\,\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x\,\right]_0^{\pi}=\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}\cdots\cdots(\text{答})$$
$$\int_0^{\pi}\sin x\cos x\,dx=\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\sin 2x\,dx=\left[\,-\frac{1}{4}\cos 2x\,\right]_0^{\pi}=\boldsymbol{0}\cdots\cdots(\text{答})$$

(2) (1) より，$\displaystyle\int_0^{\pi}\sin x\cos x\,dx=0$ であるから，
$$(\text{与式})=\int_0^{\pi}\Big[\,\{f(x)\}^2+a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x-2af(x)\sin x-2bf(x)\cos x\,\Big]\,dx$$
となり，さらに (1) より，$\displaystyle\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx=\int_0^{\pi}\cos^2 x\,dx=\frac{\pi}{2}$ であるから，
$$(\text{与式})=\int_0^{\pi}\Big[\,\{f(x)\}^2-2af(x)\sin x-2bf(x)\cos x\,\Big]\,dx+\frac{\pi}{2}a^2+\frac{\pi}{2}b^2$$
となる．ここで，$p=\displaystyle\int_0^{\pi}\{f(x)\}^2\,dx$，$q=\displaystyle\int_0^{\pi}f(x)\sin x\,dx$，$r=\displaystyle\int_0^{\pi}f(x)\cos x\,dx$ とおくと，$p,\,q,\,r$ は定数であるから，与式は次のような $a,\,b$ に関する関数になる．

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= p - 2aq - 2br + \frac{\pi}{2}a^2 + \frac{\pi}{2}b^2 \\
&= \frac{\pi}{2}\left(a^2 - \frac{4q}{\pi}a\right) + \frac{\pi}{2}\left(b^2 - \frac{4r}{\pi}b\right) + p \\
&= \frac{\pi}{2}\left(a - \frac{2q}{\pi}\right)^2 + \frac{\pi}{2}\left(b - \frac{2r}{\pi}\right)^2 - \frac{2}{\pi}q^2 - \frac{2}{\pi}r^2 + p
\end{aligned}
$$

ゆえに，$a = \dfrac{2}{\pi}q$ かつ $b = \dfrac{2}{\pi}r$ のとき，与えられた定積分の値は最小となるので，

$$\boldsymbol{a = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin x\,dx,\quad b = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos x\,dx}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

である．

(3)　(2) において $f(x) = x$ とすればよいので，

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin x\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left\{\Big[\,x(-\cos x)\,\Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}(-\cos x)\,dx\right\} \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\pi + \Big[\,\sin x\,\Big]_0^{\pi}\right) \\
&= 2 \\
b &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos x\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left\{\Big[\,x\sin x\,\Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\sin x\,dx\right\} \\
&= \frac{2}{\pi}\Big[\,\cos x\,\Big]_0^{\pi} \\
&= \frac{2}{\pi}(-1-1) \\
&= -\frac{4}{\pi}
\end{aligned}
$$

したがって，$\boldsymbol{a = 2,\ b = -\frac{4}{\pi}}$……(**答**)

解説

(1) は，半角の公式と 2 倍角の公式を使う基本的な定積分の問題ですから絶対に落とせません．ここでのミスは (2) 以降に影響します．慎重に計算しましょう．

(2) は，何が変数で何が定数なのかをしっかりと判別できなければいけません．x で定積分するので積分後は x が定数に変わりますから，残る文字は a, b のみです．つまり，与えられた定積分は，a, b の 2 変数関数であることがわかります．一般に $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ は a, b が定数ならば定数になりますから，$\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\sin x\,dx$ などを残したまま計算するよりも置き換えた方が式全体が簡単になるので，置き換えましょう．

(3) は，(2) の形から $f(x) = x$ であることは見抜けなければいけません．

本問は，(2) の出来具合が大きく得点差に影響するので，本番では差が付きやすい問題です．