26 （′12　三重大） **【難易度】** … 標準

実数 x に対し，$[\,x\,]$ を x 以下の最大の整数とする．すなわち，$[\,x\,]$ は整数であり $[\,x\,] \leqq x < [\,x\,]+1$ を満たすとする．たとえば，$[\,2\,]=2$，$\left[\,\dfrac{5}{3}\,\right]=1$ である．

（1） すべての実数 a とすべての整数 m に対し，$[\,a+m\,]=[\,a\,]+m$ が成り立つことを示せ．

（2） 数列 $\{a_k\}$ を $a_k=\left[\,\dfrac{2}{3}k\,\right]$ $(k=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ と定める．自然数 n に対して，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ を求めよ．

【テーマ】：ガウス記号と数列

方針

(1) は，実数は整数部分と小数部分に分けて考えることができるので，$a=n+\alpha$ (n を整数，$0 \leqq \alpha < 1$) と置いて考えます．(2) は，k を 3 で割った余りで場合分けしましょう．

♣ ♠

解答

（1） **【証明】**

$a=n+\alpha$ (n を整数，$0 \leqq \alpha < 1$) とおくと，

$$[\,a+m\,]=[\,n+\alpha+m\,]=[\,(n+m)+\alpha\,]$$

となる．$n+m$ は整数で α は $0 \leqq \alpha < 1$ を満たすので，

$$[\,(n+m)+\alpha\,]=n+m$$

が成り立つ．ゆえに，

$$[\,a+m\,]=[\,a\,]+m$$

が示された． **（証明終）**

（2） j を自然数とするとき，

$$a_{3j}=[\,2j\,]=2j,\quad a_{3j-1}=\left[\,2j-\frac{2}{3}\,\right]=2j-1,\quad a_{3j-2}=\left[\,2j-\frac{4}{3}\,\right]=2j-2$$

である．ゆえに，m を自然数とするとき，

（i） $n=3m$ のとき，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{3m} a_k &= \sum_{j=1}^{m}(a_{3j}+a_{3j-1}+a_{3j-2})\\ &= \sum_{j=1}^{m}(6j-3)\\ &= 6\cdot\frac{1}{2}m(m+1)-3m\\ &= 3m^2\\ &= \frac{n^2}{3}\end{aligned}$$

である．

(ii) $n=3m-1$ のとき,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{3m-1} a_k &= \sum_{j=1}^{m}(a_{3j}+a_{3j-1}+a_{3j-2})-a_{3m}\\ &=3m^2-2m\\ &=3\cdot\left(\frac{n+1}{3}\right)^2-2\cdot\frac{n+1}{3}\\ &=\frac{n^2-1}{3}\end{aligned}$$

である.

(iii) $n=3m-2$ のとき,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{3m-2} a_k &= \sum_{j=1}^{m}(a_{3j}+a_{3j-1}+a_{3j-2})-a_{3m}-a_{3m-1}\\ &=3m^2-2m-(2m-1)\\ &=3m^2-4m+1\\ &=3\cdot\left(\frac{n+2}{3}\right)^2-4\cdot\frac{n+2}{3}+1\\ &=\frac{n^2-1}{3}\end{aligned}$$

である.

ゆえに, (i)〜(iii) より,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \begin{cases} \dfrac{n^2}{3} & (n\text{ が }3\text{ の倍数のとき}) \\ \dfrac{n^2-1}{3} & (n\text{ が }3\text{ の倍数でないとき}) \end{cases} \quad\cdots\cdots(\text{答})$$

◇ ♡

解説

(1) は, あたりまえだと感じるかもしれませんが, そのあたりまえのことが示せるかどうかが問われてます. 一般に実数は, 整数部分と小数部分に分けることができるので, 解答のように, $a=n+\alpha$ とおいて議論を進めていきます. この問題では問題文にガウス記号に関する不等式が書かれていますが, これも証明できるようになっておきましょう. ちなみに証明は次のように行います.

$[x]$ を x を超えない最大の整数とするとき, $[x]=n$ とおき, α を $0\leqq\alpha<1$ を満たす実数とすると,

$$x=n+\alpha$$

と表せる. ここで, $\alpha=x-n$ となるので, $0\leqq\alpha<1$ へ代入して,

$$0\leqq x-n<1 \iff n\leqq x<n+1$$

であるから, $[x]\leqq x<[x]+1$ が示された.

(2) は, $\left[\dfrac{2}{3}k\right]$ という形から n を 3 で割った余りで場合分けする必要があることに気付きましょう. ちなみに, (1) の結果から $a_{k+3}=a_k+2$ という漸化式が成り立つことも分かります.