25 （'96　岡山大） 【難易度】 … 標準

xy 平面上に曲線 C が媒介変数 θ を用いて

$$C:\ x=f(\theta)=\cos^3\theta,\quad y=g(\theta)=-\sin^3\theta\quad (0<\theta<\pi)$$

で与えられている．C 上の点 $P_1(f(\theta_1),\,g(\theta_1))$ における C の接線 ℓ_1 と点 $P_2(f(\theta_2),\,g(\theta_2))$ における C の接線 ℓ_2 とが直交しているとする．ただし，$\theta_1<\theta_2$ とする．

（1） θ_2 を θ_1 で表せ．

（2） ℓ_1 と ℓ_2 の交点を $Q(X,\,Y)$ とする．P_1 が C 上を動くとき $X+Y$ の最小値を求めよ．

【テーマ】：媒介変数表示された曲線

方針

（1）は，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}$ であることを用いて，接線の傾きを求めます．（2）は，$X+Y$ を θ_1 の関数で表しましょう．

♣ ♠

解答

（1） $\dfrac{dx}{d\theta}=-3\cos^2\theta\sin\theta,\ \dfrac{dy}{d\theta}=-3\sin^2\theta\cos\theta$ より C 上の点 P_1 における接線の傾きは，

$$\frac{-3\sin^2\theta_1\cos\theta_1}{-3\cos^2\theta_1\sin\theta_1}=\tan\theta_1$$

で，点 P_2 における接線の傾きも同様にすると，$\tan\theta_2$ となる．

ℓ_1 と ℓ_2 が直交するので，

$$\tan\theta_1\tan\theta_2=-1\quad\Longleftrightarrow\quad\frac{\sin\theta_1\sin\theta_2}{\cos\theta_1\cos\theta_2}=-1$$

$$\sin\theta_1\sin\theta_2+\cos\theta_1\cos\theta_2=0$$

$$\cos(\theta_2-\theta_1)=0$$

$0<\theta_1<\theta_2<\pi$ より，$\theta_2-\theta_1=\dfrac{\pi}{2}$ となるので，

$$\boldsymbol{\theta_2=\theta_1+\frac{\pi}{2}}\cdots\cdots\textbf{(答)}$$

（2） ℓ_1 の方程式は，

$$y=\tan\theta_1(x-\cos^3\theta_1)-\sin^3\theta_1$$

$$\therefore\quad y=\frac{\sin\theta_1}{\cos\theta_1}x-\sin\theta_1\ \cdots\cdots ①$$

同様にして，ℓ_2 の方程式は，

$$y=\frac{\sin\theta_2}{\cos\theta_2}x-\sin\theta_2$$

であり，(1) の結果から，

$$y=\frac{\sin\left(\theta_1+\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\theta_1+\frac{\pi}{2}\right)}x-\sin\left(\theta_1+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\therefore\quad y=-\frac{\cos\theta_1}{\sin\theta_1}x-\cos\theta_1\ \cdots\cdots ②$$

①, ② の交点が $\mathrm{Q}(X,\,Y)$ であるから,

$$Y=\frac{\sin\theta_1}{\cos\theta_1}X-\sin\theta_1$$
$$Y=-\frac{\cos\theta_1}{\sin\theta_1}X-\cos\theta_1$$

を満たすので，これを解いて,

$$X=\cos\theta_1\sin\theta_1(\sin\theta_1-\cos\theta_1)$$
$$Y=-\cos\theta_1\sin\theta_1(\sin\theta_1+\cos\theta_1)$$

したがって,

$$\begin{aligned}X+Y&=-2\cos^2\theta_1\sin\theta_1\\&=-2(1-\sin^2\theta_1)\sin\theta_1\end{aligned}$$

となる．ここで，$\sin\theta_1=t$ とおき，$X+Y=f(t)$ とすると,

$$f(t)=-2(1-t^2)t=2t^3-2t\quad(0<t<1)$$

となる．

$f'(t)=6t^2-2$ より，$f'(t)=0$ のとき，$t=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ であるから,

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		$\searrow$		$\nearrow$	

これより，$t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき，$f(t)$ は最小値をとる．

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{4\sqrt{3}}{9}$$

より，求める最小値は，$\boldsymbol{-\dfrac{4\sqrt{3}}{9}}$……(**答**)

◇ ♡

解説

曲線が媒介変数で表されていますので，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}$ を用いて接線の傾きを求めます．その後は，三角関数の問題となるので，加法定理を用いて θ_1 と θ_2 の関係を求めています．(2) は，交点の座標を素直に計算しましょう．結果的に $X+Y$ は θ_1 の関数として見なせるので，置き換えをすれば 3 次関数に帰着させられます．$X+Y$ を θ_1 の関数とみなして微分しても構いませんが，$\sin\theta_1$ に関しての 3 次関数になるので，置き換えをした方が計算が楽になるでしょう．