22 （'90　一橋大） 【難易度】 … やや難

a, b, c を正の定数とする．$ax+by+cz=1$ を満たす実数 x, y, z のうち，$\min\left\{\dfrac{x}{a},\ \dfrac{y}{b},\ \dfrac{z}{c}\right\}$ を最大にするような x, y, z とその最大値を求めよ．ただし，$\min\{p, q, r\}$ は p, q, r のうちの最小の値を表す．

【テーマ】：不等式の証明

方針

$\min\{p, q, r\}$ は p, q, r の最小値を表す関数です．最小値を k と置いて考えます．

♣ ♠

解答

$\dfrac{x}{a}, \dfrac{y}{b}, \dfrac{z}{c}$ の中で最も小さいものを k とおく．すなわち

$$\min\left\{\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\right\}=k$$

とおくと,

$$\frac{x}{a} \geqq k,\quad \frac{y}{b} \geqq k,\quad \frac{z}{c} \geqq k$$

である．$a^2>0, b^2>0, c^2>0$ であることから,

$$ax+by+cz=a^2\cdot\frac{x}{a}+b^2\cdot\frac{y}{b}+c^2\cdot\frac{z}{c} \geqq a^2k+b^2k+c^2k$$

が成り立ち，$ax+by+cz=1$ であるから,

$$1 \geqq (a^2+b^2+c^2)k \quad\Longleftrightarrow\quad k \leqq \frac{1}{a^2+b^2+c^2} \quad (\because\ \ a^2+b^2+c^2>0)$$

である．等号は，$ax+by+cz=1$ かつ $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}=k$ のとき成り立つので,

$$\boldsymbol{x=\frac{a}{a^2+b^2+c^2},\quad y=\frac{b}{a^2+b^2+c^2},\quad z=\frac{c}{a^2+b^2+c^2}}\cdots\cdots\textbf{(答)}$$

のとき成立し，$\min\left\{\dfrac{x}{a}, \dfrac{y}{b}, \dfrac{z}{c}\right\}$ の最大値すなわち k の最大値は,

$$\boldsymbol{\frac{1}{a^2+b^2+c^2}}\cdots\cdots\textbf{(答)}$$

である．

♢ ♡

解説

$\min\{p, q, r\}$ の処理の仕方が問題です．最小値を k と置いてしまえば不等式が作れるので，後は与えられた条件式 $ax+by+cz=1$ をどのように変形するかがポイントとなります．解答を見ればそんなに難しく感じないかもしれませんが，方針を立てるのが難しい問題でしょう．

等号成立の x, y, z の値は，$x=ak, y=bk, z=ck$ であることと，等号が成り立つときは，$k=\dfrac{1}{a^2+b^2+c^2}$ であることから求められます．