21 （'98　京都大） 【難易度】 … やや難

$a,\,m$ は自然数で a は定数とする．xy 平面上の点 $(a,\,m)$ を頂点とし，原点と点 $(2a,\,0)$ を通る放物線を考える．この放物線と x 軸で囲まれる領域の面積を S_m，この領域の内部および境界線上にある格子点の数を L_m とする．このとき極限値 $\displaystyle\lim_{m\to\infty}\frac{L_m}{S_m}$ を求めよ．ただし xy 平面上の格子点とはその点の x 座標と y 座標がともに整数となる点のことである．

【テーマ】：格子点と数列の極限

方針

まず，放物線の方程式を求めます．$x=j$ 上の格子点の個数はガウス記号を用いて表します．

解答

放物線の方程式を

$$y=kx(x-2a)$$

とおくと，これが点 $(a,\,m)$ を通るので，

$$m=ka(-a)\quad\Longleftrightarrow\quad k=-\frac{m}{a^2}$$

よって，放物線の方程式は，

$$y=-\frac{m}{a^2}x(x-2a)$$

である．$x=j$ $(j=0,\,1,\,2,\,\cdots,\,2a)$ 上の格子点の個数 $N(j)$ は，

$$N(j)=\left[-\frac{m}{a^2}j(j-2a)\right]+1$$

である．ただし，$[\,x\,]$ は x を超えない最大の整数を表す．ここで，一般に実数 x に対して，

$$x-1<[\,x\,]\leqq x\quad\Longleftrightarrow\quad x<[\,x\,]+1\leqq x+1$$

が成り立つので，

$$-\frac{m}{a^2}j(j-2a)<\left[-\frac{m}{a^2}j(j-2a)\right]+1\leqq-\frac{m}{a^2}j(j-2a)+1$$
$$-\frac{m}{a^2}j(j-2a)<N(j)\leqq-\frac{m}{a^2}j(j-2a)+1$$

が成り立つので，$j=0,\,1,\,2,\,\cdots,\,2a$ として辺々加えると，

$$\sum_{j=0}^{2a}\left\{-\frac{m}{a^2}j(j-2a)\right\}<\sum_{j=0}^{2a}N(j)\leqq\sum_{j=0}^{2a}\left\{-\frac{m}{a^2}j(j-2a)+1\right\}$$

$$\sum_{j=0}^{2a}\left\{-\frac{m}{a^2}j(j-2a)\right\}<L_m\leqq\sum_{j=0}^{2a}\left\{-\frac{m}{a^2}j(j-2a)+1\right\}$$

である．ここで，

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{2a}\left\{-\frac{m}{a^2}j(j-2a)\right\}&=\frac{m}{a^2}\left\{2a\cdot\frac{1}{2}\cdot2a(2a+1)-\frac{1}{6}\cdot2a(2a+1)(4a+1)\right\}\\&=\frac{m}{a^2}\left\{2a^2(2a+1)-\frac{1}{3}a(2a+1)(4a+1)\right\}\\&=\frac{m}{3a}(2a+1)\{6a-(4a+1)\}\\&=\frac{m(4a^2-1)}{3a}\end{aligned}$$

であるから，

$$\frac{m(4a^2-1)}{3a} < L_m \leqq \frac{m(4a^2-1)}{3a} + 2a + 1 \cdots\cdots ①$$

となる．

一方，放物線 $y = -\dfrac{m}{a^2}x(x-2a)$ と x 軸で囲まれた部分の面積 S_m は，

$$\begin{aligned} S_m &= \int_0^{2a} \left\{ -\frac{m}{a^2}x(x-2a) \right\} dx \\ &= \frac{m}{6a^2}(2a)^3 \\ &= \frac{4ma}{3} \end{aligned}$$

であるから，① の各辺を $S_m > 0$ で割ると，

$$\frac{m(4a^2-1)}{3a} \cdot \frac{3}{4ma} < \frac{L_m}{S_m} \leqq \frac{m(4a^2-1)}{3a} \cdot \frac{3}{4ma} + (2a+1) \cdot \frac{3}{4ma}$$

$$\frac{4a^2-1}{4a^2} < \frac{L_m}{S_m} \leqq \frac{4a^2-1}{4a^2} + \frac{3(2a+1)}{4am}$$

$m \to \infty$ のとき，$\dfrac{3(2a+1)}{4am} \to 0$ であるから，はさみうちの原理より，

$$\lim_{m\to\infty} \frac{L_m}{S_m} = \boldsymbol{\frac{4a^2-1}{4a^2}} \cdots\cdots \textbf{(答)}$$

◊ ♡

解説

放物線の方程式を誤って，$y = -x(x-2a)$ などとしないように注意しましょう．これでは点 (a, m) を通るという条件を無視していることになります．さて，放物線の方程式を正しく求めると，$y = -\dfrac{m}{a^2}x(x-2a)$ となるので，これでは，j を整数として $x = j$ のとき，y の値が整数になるとは限りません．格子点は x, y がともに整数でなければならないので，ガウス記号 $[\,x\,]$ を用いて整数を表現することになります．本問のポイントは，ここにあります．L_m を正しく求める必要はありませんし，求められません．要するに極限値が欲しいわけですから，不等式を作ってはさみうちの原理に持ち込むのです．解答中にも書きましたが，実数 x に対して，$x-1 < [\,x\,] \leqq x$ が成り立ちます．ガウス記号と極限の問題ではこの不等式が必須です．必ず理解して使えるようにしておきましょう．