20 （'05　九州大） 【難易度】 … やや難

実数 x に対して，$[\,x\,]$ は x を超えない最大の整数を表す．例えば，$\left[\,\dfrac{3}{2}\,\right]=1,\ [\,2\,]=2$ である．このとき，$0<\theta<\pi$ として次の問いに答えよ．ただし，必要なら $\sin\alpha=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ となる角 $\alpha\ \left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ を用いてよい．

(1) 不等式 $\log_2\left[\dfrac{5}{2}+\cos\theta\right]\leqq 1$ を満たす θ の範囲を求めよ．

(2) 不等式 $\left[\dfrac{3}{2}+\log_2\sin\theta\right]\geqq 1$ を満たす θ の範囲を求めよ．

(3) 不等式 $\log_2\left[\dfrac{5}{2}+\cos\theta\right]\leqq\left[\dfrac{3}{2}+\log_2\sin\theta\right]$ を満たす θ の範囲を求めよ．

【テーマ】：ガウス記号と三角不等式

方針

ガウス記号の定義から $[\,x\,]\leqq x<[\,x\,]+1$ が成り立つので，これを用います．

♣　♠

解答

(1) $\log_2\left[\dfrac{5}{2}+\cos\theta\right]\leqq 1$ より，$\left[\dfrac{5}{2}+\cos\theta\right]\leqq 2$ であり，$-1<\cos\theta<1$ であるから，

$$\frac{3}{2}<\frac{5}{2}+\cos\theta<\frac{7}{2}\ \cdots\cdots\ Ⓐ$$

である．したがって，

$$\left[\frac{5}{2}+\cos\theta\right]=1\ \text{または}\ \left[\frac{5}{2}+\cos\theta\right]=2$$

のいずれかである．

$$\left[\frac{5}{2}+\cos\theta\right]=1 \iff 1\leqq\frac{5}{2}+\cos\theta<2 \iff -\frac{3}{2}\leqq\cos\theta<-\frac{1}{2}$$

よって，$-1<\cos\theta<-\dfrac{1}{2}$ であるから，$\dfrac{2}{3}\pi<\theta<\pi\ \cdots\cdots$ ①

また，

$$\left[\frac{5}{2}+\cos\theta\right]=2 \iff 2\leqq\frac{5}{2}+\cos\theta<3 \iff -\frac{1}{2}\leqq\cos\theta<\frac{1}{2}$$

よって，$-\dfrac{1}{2}\leqq\cos\theta<\dfrac{1}{2}$ であるから，$\dfrac{\pi}{3}<\theta\leqq\dfrac{2}{3}\pi\ \cdots\cdots$ ②

①, ② より，$\boldsymbol{\dfrac{\pi}{3}<\theta<\pi}$……(**答**)

(2) $0<\sin\theta\leqq 1$ より，$\log_2\sin\theta\leqq 0$ である．よって，

$$\frac{3}{2}+\log_2\sin\theta\leqq\frac{3}{2}\ \cdots\cdots\ Ⓑ$$

である．$\left[\dfrac{3}{2}+\log_2\sin\theta\right]\geqq 1$ となるのは，

$$1\leqq\frac{3}{2}+\log_2\sin\theta\leqq\frac{3}{2}$$

のときである．

$$-\frac{1}{2} \leqq \log_2 \sin\theta \leqq 0 \iff \frac{1}{\sqrt{2}} \leqq \sin\theta \leqq 1$$

ゆえに，$\boldsymbol{\frac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \frac{3}{4}\pi}$……**(答)**

(3) Ⓐ より，$1 \leqq \left[\frac{5}{2}+\cos\theta\right] \leqq 3$ であるから，

$$0 \leqq \log_2\left[\frac{5}{2}+\cos\theta\right] \leqq \log_2 3$$

である．また，Ⓑ より，$\left[\frac{3}{2}+\log_2\sin\theta\right] \leqq 1$ であるから，$\left[\frac{3}{2}+\log_2\sin\theta\right]$ のとる値は 0 または 1 である．

(i) $\left[\frac{3}{2}+\log_2\sin\theta\right]=0$ のとき，すなわち

$$0 \leqq \frac{3}{2}+\log_2\sin\theta < 1 \iff -\frac{3}{2}\log_2\sin\theta < -\frac{1}{2}$$
$$\iff \frac{1}{2\sqrt{2}} \leqq \sin\theta < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore\ \alpha \leqq \theta < \frac{\pi}{4},\quad \frac{3}{4}\pi < \theta \leqq \pi-\alpha \cdots\cdots ③$$

のとき，$\log_2\left[\frac{5}{2}+\cos\theta\right]=0$ より，$\left[\frac{5}{2}+\cos\theta\right]=1$ であるから，

$$1 \leqq \frac{5}{2}+\cos\theta < 2 \iff -\frac{3}{2} \leqq \cos\theta < -\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ -1 \leqq \cos\theta < -\frac{1}{2}$$

すなわち $\frac{2}{3}\pi < \theta \leqq \pi$ となるので，③ と合わせて，$\frac{3}{4}\pi < \theta \leqq \pi-\alpha$

(ii) $\left[\frac{3}{2}+\log_2\sin\theta\right]=1$ のとき，すなわち

$$1 \leqq \frac{3}{2}+\log_2\sin\theta < 2$$

であり，これは (2) より，$\frac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \frac{3}{4}\pi$ …… ④ である．このとき，

$$\log_2\left[\frac{5}{2}+\cos\theta\right]=1 \iff \left[\frac{5}{2}+\cos\theta\right]=2$$

$$2 \leqq \frac{5}{2}+\cos\theta < 3 \iff -\frac{1}{2} \leqq \cos\theta < \frac{1}{2}$$

$$\therefore\ \frac{\pi}{3} < \theta \leqq \frac{2}{3}\pi$$

となるので，④ と合わせて，$\frac{\pi}{3} < \theta \leqq \frac{3}{4}\pi$

(i), (ii) より，求める θ の範囲は，

$$\boldsymbol{\frac{\pi}{3} < \theta \leqq \pi-\alpha}\cdots\cdots\textbf{(答)}$$

◇ ♡

解説

ガウス記号は整数の値しかとらないので，それをもとに値を絞っていきます．対数は飾りのようなもので本質的には三角不等式の問題です．(3) は (1), (2) の結果が利用できます．問題全体を通して小問がどのように関連付いているかを見極めましょう．