19 ('13　奈良女子大)　　【難易度】 … 標準

k を正の実数とする．座標平面において，2 つの曲線 $y = k\tan x$ と $y = \cos x$ の $0 \leqq x < \frac{\pi}{2}$ の部分をそれぞれ C_1 と C_2 とする．C_1 と C_2 の交点を P とし，その x 座標を α とする．次の問いに答えよ.

(1)　$\sin\alpha$ を k を用いて表せ.

(2)　点 P における C_1 の接線と x 軸との交点を Q とする．次の (i), (ii) に答えよ.

(i)　点 Q の x 座標を α を用いて表せ.

(ii)　点 R$(\alpha, 0)$ をとり，三角形 PQR の面積を S とおく．$k \to 0$ のときの $\frac{S}{k}$ の極限値を求めよ.

【テーマ】：関数の極限

方針

(1) は，2 曲線を連立させて $\sin\alpha$ に関する 2 次方程式を解きます．(2) は，(1) の結果を用いて丁寧に計算しましょう.

♣　♠

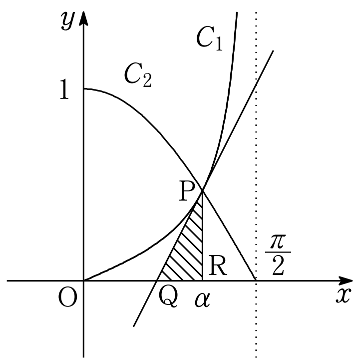
解答

(1)　題意より，$k\tan\alpha = \cos\alpha$ が成り立つので，

$$k\sin\alpha = \cos^2\alpha \iff k\sin\alpha = 1 - \sin^2\alpha$$

$$\sin^2\alpha + k\sin\alpha - 1 = 0$$

$$\therefore\ \sin\alpha = \frac{-k \pm \sqrt{k^2+4}}{2}$$



$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ であるから，$\sin\frac{\alpha}{2} > 0$ である．よって，

$$\boldsymbol{\sin\alpha = \frac{-k + \sqrt{k^2+4}}{2}} \cdots\cdots \textbf{(答)}$$

(2) (i)　$y' = \frac{k}{\cos^2 x}$ より，点 P における接線の方程式は，

$$y = \frac{k}{\cos^2\alpha}(x - \alpha) + k\tan\alpha$$

$$\therefore\ y = \frac{k}{\cos^2\alpha}x - \frac{k\alpha}{\cos^2\alpha} + k\tan\alpha$$

x 軸との交点は，$y = 0$ として，

$$\frac{k}{\cos^2\alpha}x = \frac{k\alpha}{\cos^2\alpha} - k\tan\alpha$$

$$x = \alpha - \tan\alpha\cos^2\alpha$$

$$\therefore\ \boldsymbol{x = \alpha - \sin\alpha\cos\alpha} \cdots\cdots \textbf{(答)}$$

(ii)　$\mathrm{RQ} = \sin\alpha\cos\alpha$，$\mathrm{PR} = \cos\alpha$ であるから，

$$S = \frac{1}{2}\sin\alpha\cos^2\alpha \iff S = \frac{1}{2}k\sin^2\alpha \quad (\because\ k\sin\alpha = \cos^2\alpha)$$

$$\iff \frac{S}{k} = \frac{1}{2}\sin^2\alpha$$

$k \to 0$ のとき，(1) の結果から $\sin\alpha \to 1$ であるから，

$$\lim_{k\to 0}\frac{S}{k} = \boldsymbol{\frac{1}{2}} \cdots\cdots \textbf{(答)}$$

$\diamondsuit$ ——— $\heartsuit$

解説

(1) は，交点を求める問題ですが，$0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$ の区間で交点がただ 1 つしかないことは証明できますか？図を用いれば確かにそうなっていますが，計算でこれを証明できるようになっておく必要があります．

$0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$ において，$y = k\tan x$ は $k > 0$ なので，単調増加であり，$y = \cos x$ は単調減少であることがわかります．ただし，これだけでは証明できたことになりません．そこで，$h(x) = k\tan x - \cos x$ という関数を作ります．$y = k\tan x$ が単調増加で $y = \cos x$ が単調減少なので，$h(x)$ は単調増加関数となります．したがって，

$$h(0) = -1, \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{2} - 0} h(x) = +\infty$$

であることと，関数 $h(x)$ が連続関数であることから中間値の定理より $h(x) = 0$ は $0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$ でただ 1 つの実数解をもつことが示されます．ここで注意したいのは，$h\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ は計算できません．それは $\tan x$ が $\dfrac{\pi}{2}$ で定義されないからです．そのためこのような場合は極限を計算する必要があります．