18 （'13　千葉大） 【難易度】… 標準

整数 $p,\ q\ (p \geqq q \geqq 0)$ に対して 2 項係数を ${}_p\mathrm{C}_q = \dfrac{p!}{q!(p-q)!}$ と定める．なお $0! = 1$ とする．

（1） $n,\ k$ が 0 以上の整数のとき，

$$ {}_{n+k+1}\mathrm{C}_{k+1} \times \left(\frac{1}{{}_{n+k}\mathrm{C}_k} - \frac{1}{{}_{n+k+1}\mathrm{C}_k} \right) $$

を計算し，n によらない値になることを示せ．

（2） m が 3 以上の整数のとき，和 $\dfrac{1}{{}_3\mathrm{C}_3} + \dfrac{1}{{}_4\mathrm{C}_3} + \dfrac{1}{{}_5\mathrm{C}_3} + \cdots\cdots + \dfrac{1}{{}_m\mathrm{C}_3}$ を求めよ．

【テーマ】：二項係数と和

方針

（1）は，二項係数の定義にしたがって計算します．（2）では（1）の結果を用います．

♣ ♠

解答

（1） **【証明】**

$$ {}_{n+k+1}\mathrm{C}_{k+1} = \frac{(n+k+1)!}{(k+1)!n!} $$

$$ {}_{n+k}\mathrm{C}_k = \frac{(n+k)!}{k!n!} $$

$$ {}_{n+k+1}\mathrm{C}_k = \frac{(n+k+1)!}{k!(n+1)!} $$

であるから，

$$ \begin{aligned} (\text{与式}) &= \frac{(n+k+1)!}{(k+1)!n!} \times \left(\frac{k!n!}{(n+k)!} - \frac{k!(n+1)!}{(n+k+1)!} \right) \\ &= \frac{(n+k+1)!}{(k+1)!n!} \times k!n! \left(\frac{1}{(n+k)!} - \frac{n+1}{(n+k+1)!} \right) \\ &= \frac{(n+k+1)!}{k+1} \times \frac{n+k+1-(n+1)}{(n+k+1)!} \\ &= \frac{k}{k+1} \end{aligned} $$

ゆえに，n によらない値になることが示された． **（証明終）**

（2） （1）の結果より，

$$ \frac{1}{{}_{n+k}\mathrm{C}_k} - \frac{1}{{}_{n+k+1}\mathrm{C}_k} = \frac{k}{k+1} \cdot \frac{1}{{}_{n+k+1}\mathrm{C}_{k+1}} $$

が成り立つ．この式において，$k = 2$ とすると，

$$ \frac{1}{{}_{n+2}\mathrm{C}_2} - \frac{1}{{}_{n+3}\mathrm{C}_2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{{}_{n+3}\mathrm{C}_3} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{{}_{n+3}\mathrm{C}_3} = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{{}_{n+2}\mathrm{C}_2} - \frac{1}{{}_{n+3}\mathrm{C}_2} \right) $$

$$ \begin{aligned} \frac{1}{{}_3\mathrm{C}_3} + \frac{1}{{}_4\mathrm{C}_3} + \frac{1}{{}_5\mathrm{C}_3} + \cdots\cdots + \frac{1}{{}_m\mathrm{C}_3} &= \sum_{n=0}^{m-3} \frac{1}{{}_{n+3}\mathrm{C}_3} \\ &= \sum_{n=0}^{m-3} \frac{3}{2} \left(\frac{1}{{}_{n+2}\mathrm{C}_2} - \frac{1}{{}_{n+3}\mathrm{C}_2} \right) \\ &= \frac{3}{2} \left\{ \left(\frac{1}{{}_2\mathrm{C}_2} - \frac{1}{{}_3\mathrm{C}_2} \right) + \left(\frac{1}{{}_3\mathrm{C}_2} - \frac{1}{{}_4\mathrm{C}_2} \right) + \cdots\cdots \right. \\ &\qquad \left. \cdots\cdots + \left(\frac{1}{{}_{m-1}\mathrm{C}_2} - \frac{1}{{}_m\mathrm{C}_2} \right) \right\} \end{aligned} $$

$$= \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{{}_m\mathrm{C}_2}\right)$$
$$= \frac{3}{2}\left(1 - \frac{2}{m(m-1)}\right)$$
$$= \boldsymbol{\frac{3(m+1)(m-2)}{2m(m-1)}} \cdots\cdots(\textbf{答})$$

◇ ♡

解説

階乗の計算に慣れていないと計算間違いをするかもしれません．二項係数に関する問題は，難関大学ではよく出題されます．組合せを表す ${}_n\mathrm{C}_r$ と和が出てきたら，二項定理を利用して計算するということも知っておきましょう．

【二項定理】

$(a+b)^n$ の展開公式は，

$$(a+b)^n = {}_n\mathrm{C}_0 a^n + {}_n\mathrm{C}_1 a^{n-1}b + {}_n\mathrm{C}_2 a^{n-2}b^2 + \cdots\cdots + {}_n\mathrm{C}_r a^{n-r}b^r + \cdots\cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1} ab^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_n b^n$$
$$= \sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_r a^{n-r} b^r$$

である．ここで，二項係数 ${}_n\mathrm{C}_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ である．ただし，$0! = 1$ と定義する．

