

17 ('11 芝浦工大)

【難易度】…標準

曲線 $C: y = \frac{2x-2}{x-4}$ と直線 $l: y = -x-1$ の交点の x 座標を α, β ($\alpha < \beta$) とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) 曲線 C の漸近線の方程式および α, β の値を求めよ。
- (2) 曲線 C と直線 l で囲まれた図形の面積を求めよ。
- (3) 連立不等式

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq \beta \\ y \leq \frac{2x-2}{x-4} \\ y \geq -x-1 \end{cases}$$

の表す領域を D とする。 D を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

【テーマ】: 回転体の体積

方針

- (1) では、分数式の漸化式は $y = \frac{a}{x-p} + q$ の形に変形します。(2) は、グラフをかいて公式通り計算します。
- (3) は、図形が回転軸を含んでいるので、対称移動させて考えます。

解答

- (1) $y = \frac{2x-2}{x-4} = \frac{2(x-4)+6}{x-4} = \frac{6}{x-4} + 2$ である。よって、曲線 C の漸近線の方程式は、
 $x = 4, y = 2$ ……(答)

である。また、 C と l の交点の x 座標は、

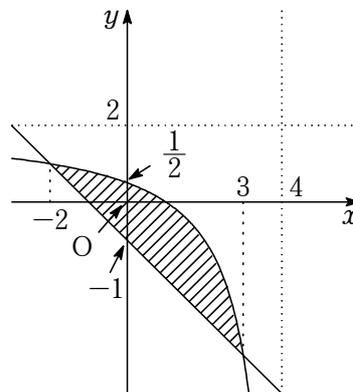
$$\begin{aligned} \frac{2x-2}{x-4} = -x-1 &\iff 2x-2 = (-x-1)(x-4) \\ &\iff (x-3)(x+2) = 0 \end{aligned}$$

よって、 $\alpha = -2, \beta = 3$ ……(答)

- (2) (1) より、 C と l のグラフは右のようになる。

ゆえに、求める面積 S は、

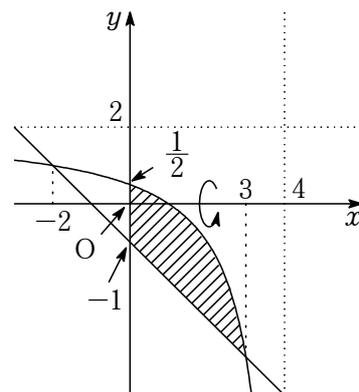
$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^3 \left\{ \frac{2x-2}{x-4} - (-x-1) \right\} dx \\ &= \int_{-2}^3 \left(\frac{2x-2}{x-4} + x+1 \right) dx \\ &= \int_{-2}^3 \left(\frac{6}{x-4} + x+3 \right) dx \\ &= \left[6 \log |x-4| + \frac{1}{2}x^2 + 3x \right]_{-2}^3 \\ &= \left(\frac{9}{2} + 9 \right) - (6 \log 6 + 2 - 6) \\ &= \frac{35}{2} - 6 \log 6 \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$



(3) 領域 D を図示すると右のようになる .

$y = -x - 1$ のグラフの x 軸より下方部分を x 軸に関して対称移動したグラフの方程式は $y = x + 1$ であり, $x > 0$ において $x + 1 > \frac{2x-2}{x-4}$ となるので, 求める体積を V とすると,

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^3 (-x-1)^2 dx - \pi \int_1^3 \left(\frac{2x-2}{x-4} \right)^2 dx \\ &= \pi \left[\frac{1}{3}(x+1)^3 \right]_0^3 - \pi \int_1^3 \left(\frac{6}{x-4} + 2 \right)^2 dx \\ &= \frac{4^3-1^3}{3} \pi - \pi \int_1^3 \left\{ \frac{36}{(x-4)^2} + \frac{24}{x-4} + 4 \right\} dx \\ &= 21\pi - \pi \left[-\frac{36}{x-4} + 24 \log|x-4| + 4x \right]_1^3 \\ &= 21\pi - \pi(36 + 12 - 12 - 24 \log 3 - 4) \\ &= (24 \log 3 - 11) \pi \cdots \cdots (\text{答}) \end{aligned}$$



【解説】

$y = \frac{a}{x-p} + q$ をした分数関数のグラフでの漸近線は, $x = p, y = q$ です. ちなみに, 関数 $y = f(x)$ のグラフにおいて,

$$a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \{f(x) - ax\}$$

を満たす実数 a, b が存在するとき, 漸近線 $y = ax + b$ が存在します.

(3) では, 領域が回転軸を含んでいるので, 図形を回転軸の片方に対称移動させたとき, 上下関係を調べる必要があります. そのため本問では, $y = x + 1$ と $y = \frac{2x-2}{x-4}$ の大小を比較しています. 何も調べずに単に計算だけをしていると減点は避けられません.