16 （'03 名古屋大） 【難易度】 … 標準

一つの箱の中に 1 から 10 までの数が書かれたカードが 4 枚ずつ計 40 枚入っている．この箱から k 枚 $(3 \leqq k \leqq 12)$ のカードを同時に取り出す．このうちの 3 枚のカードが同じ数で残りはこれとは違う互いに異なる数となる確率を $p(k)$ とする．

（1） $p(k)$ を求めよ．

（2） $4 \leqq k \leqq 12$ のとき，$f(k) = \dfrac{p(k-1)}{p(k)}$ を求めよ．

（3） $p(k)$ を最大にする k の値を求めよ．

【テーマ】：確率の最大値

方針

(1) は，3 枚が同じ数となる数の選び方を考えて，次に残り $k-3$ 枚が異なる数となる選び方を考えます．(3) は確率の最大値を求めるため $f(k)$ と 1 の大小関係を考えます．

♣ ♠

解答

（1） k 枚の取り出し方は，${}_{40}\mathrm{C}_k$（通り）である．3 枚のカードが同じ数なので，そのカードの選び方は，

$$10 \times {}_4\mathrm{C}_3 = 40 \text{（通り）}$$

である．また，残り $k-3$ 枚は互いに異なる数となるので，その選び方は，

$$ {}_9\mathrm{C}_{k-3} \times ({}_4\mathrm{C}_1)^{k-3} = 4^{k-3} \cdot {}_9\mathrm{C}_{k-3} \text{（通り）}$$

ゆえに，求める確率は，

$$\boldsymbol{p(k) = \frac{40 \cdot 4^{k-3} \cdot {}_9\mathrm{C}_{k-3}}{{}_{40}\mathrm{C}_k}} \cdots\cdots \text{（答）}$$

（2） （1）より，

$$\begin{aligned}
f(k) &= \frac{40 \cdot 4^{k-4} \cdot {}_9\mathrm{C}_{k-4}}{{}_{40}\mathrm{C}_{k-1}} \cdot \frac{{}_{40}\mathrm{C}_k}{40 \cdot 4^{k-3} \cdot {}_9\mathrm{C}_{k-3}} \\
&= \frac{40 \cdot 4^{k-4} \cdot \dfrac{9!}{(k-4)!(13-k)!}}{\dfrac{40!}{(k-1)!(41-k)!}} \cdot \frac{\dfrac{40!}{k!(40-k)!}}{40 \cdot 4^{k-3} \cdot \dfrac{9!}{(k-3)!(12-k)!}} \\
&= \frac{40 \cdot 4^{k-4} \cdot 9!(k-1)!(41-k)!}{40!(k-4)!(13-k)!} \cdot \frac{40!(k-3)!(12-k)!}{40 \cdot 4^{k-3} \cdot 9!k!(40-k)!} \\
&= \boldsymbol{\frac{(k-3)(41-k)}{4k(13-k)}} \cdots\cdots \text{（答）}
\end{aligned}$$

（3） $f(k) < 1$ のときを考える．(2) より，

$$\frac{(k-3)(41-k)}{4k(13-k)} < 1 \iff (k-3)(41-k) < 4k(13-k) \quad (\because \ k(13-k) > 0)$$

整理すると，

$$3k^2 - 8k - 123 < 0$$

となる．ここで，$g(k) = 3k^2 - 8k - 123$ とおくと，

$$g(k) = 3\left(k - \frac{4}{3}\right)^2 - \frac{385}{3}$$

であるから，$4 \leqq k \leqq 12$ では $g(k)$ のグラフは単調増加である．

$$g(7) = 3 \cdot 49 - 56 - 123 = -32 < 0$$
$$g(8) = 3 \cdot 64 - 64 - 123 = 5 > 0$$

より，

$4 \leqq k \leqq 7$ のとき，　$p(k-1) < p(k)$

$8 \leqq k \leqq 12$ のとき，　$p(k-1) > p(k)$

である．したがって，

$$p(3) < p(4) < \cdots\cdots < p(6) < p(7) > p(8) > \cdots\cdots > p(12)$$

となり，$k = 7$ のとき $p(k)$ は最大となる．ゆえに，求める k の値は，

$\boldsymbol{k = 7}$……**（答）**

解説

確率の最大値・最小値は，頻出の問題です．誘導してくれている場合もありますが，誘導なしでも自分で求められるようになっていなければいけません．

P_k が階乗を含む式になるときは，このままでは P_k の最大値が求められません．そこで，次のように考えて最大となる k を決定します．

$$P_{k+1} < P_k \iff \frac{P_{k+1}}{P_k} < 1 \quad \cdots\cdots①$$
$$P_{k+1} = P_k \iff \frac{P_{k+1}}{P_k} = 1 \quad \cdots\cdots②$$
$$P_{k+1} > P_k \iff \frac{P_{k+1}}{P_k} > 1 \quad \cdots\cdots③$$

このように，$\dfrac{P_{k+1}}{P_k}$ と 1 の大小関係を調べることで，P_{k+1} と P_k の大小関係がわかるのです．しかも $\dfrac{P_{k+1}}{P_k}$ のように分数計算にすることで，階乗が消えるというメリットもあります．あとは，①, ②, ③ をみたす自然数 k の値を求めて，それに基づいて

$$P_0 < P_2 < \cdots\cdots P_{l-1} < P_l > P_{l+1} > \cdots\cdots$$

となるような l を求めれば，$k = l$ のとき，P_k は最大になるというわけです．

注 ： $P_0 < P_2 < \cdots\cdots P_{l-1} < P_l = P_{l+1} > P_{l+2} > \cdots\cdots$ のように最大となる k が 2 つ存在することもあります．

本問では，k についての 2 次方程式が出てきましたが，解の公式を使うタイプで計算がやや煩雑になるので，グラフを利用しました．k は自然数なので，$g(k) < 0$, $g(k+1) > 0$ となる自然数 k を見つければよいのです．