15 （'02　山形大） 【難易度】 … 標準

極方程式 $2r^2\cos^2\theta + r^2 - 6r\sin\theta = 3$ で与えられる曲線がある．次の各問いに答えよ．

（1） この曲線を x, y 座標に関する方程式で表し，そのグラフの概形をかけ．

（2） この曲線の $y \geqq 0$ の部分と x 軸で囲まれる図形の面積を求めよ．

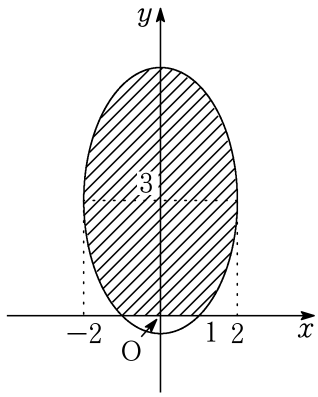
【テーマ】：極座標と極方程式

方針

極座標から直交座標への変換は，$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ で行います．

♣ ♠

解答



（1） 与えられた極方程式において，$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ を代入すると，

$$2x^2 + x^2 + y^2 - 6y = 3$$

となるので，これを整理して，

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{12} = 1}\cdots\cdots\text{（答）}$$

（2） $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{(y-3)^2}{12} = 1$ のグラフと x 軸との交点は，$y = 0$ として，

$$\frac{x^2}{4} + \frac{3}{4} = 1 \text{ すなわち } x = \pm 1$$

であるから，$(1,\ 0)$, $(-1,\ 0)$ である．また，$\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{(y-3)^2}{12} = 1$ を y について解くと，

$$(y-3)^2 = 12 - 3x^2$$

$$y - 3 = \pm\sqrt{12 - 3x^2} \iff y = 3 \pm \sqrt{12 - 3x^2}$$

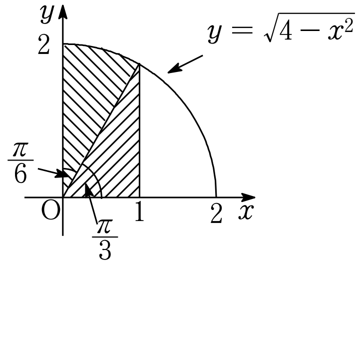
ゆえに，求める面積 S は，y 軸における対称性から，

$$\begin{aligned} S &= 2\int_0^1 \left(3 + \sqrt{12 - 3x^2}\right) dx + \int_1^2 \left\{3 + \sqrt{12 - 3x^2} - \left(3 - \sqrt{12 - 3x^2}\right)\right\} dx \\ &= 2\int_0^1 \left(3 + \sqrt{3}\sqrt{4 - x^2}\right) dx + 4\sqrt{3}\int_1^2 \sqrt{4 - x^2}\, dx \end{aligned}$$

ここで，右図斜線部分の面積から，

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{4 - x^2}\, dx &= \underbrace{\frac{1}{2}\cdot 2^2 \cdot \frac{\pi}{6}}_{\text{扇形の面積}} + \underbrace{\frac{1}{2}\cdot 1 \cdot \sqrt{3}}_{\text{直角三角形の面積}} \\ &= \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_1^2 \sqrt{4 - x^2}\, dx &= \pi - \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$



よって，

$$\begin{aligned} S &= 2\left\{3 + \sqrt{3}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\} + 4\sqrt{3}\left(\frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \boldsymbol{3 + \frac{10\sqrt{3}}{3}\pi}\cdots\cdots\text{（答）} \end{aligned}$$

◇ ♡

$\boxed{\text{解説}}$

極座標から直交座標への変換は基本問題です．$r^2 = x^2 + y^2$ となることにも注意しましょう．(2) では，面積の計算を行いますが，公式通り立式しました．$\displaystyle\int_0^1 \sqrt{4 - x^2}\,dx$ の計算は，$x = 2\sin\theta$ とおいて置換積分を用いてもできますが，$y = \sqrt{4 - x^2}$ は円の上半分を表しているので，扇形と直角三角形の面積を用いれば積分計算の代用になります．頻出なので理解して使えるようにしておきましょう．