14 （'98　福井医科大） 【難易度】 … やや難

空間内に 4 点 $A(4,\ 0,\ 0)$, $B\left(\frac{4}{5},\ 2,\ \frac{12}{5}\right)$, $C(0,\ 0,\ 3)$, $P(u,\ v,\ w)$ がある．このとき，次の問いに答えよ．

（1） $\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ と表せる実数 $s,\ t$ が存在するための $u,\ v,\ w$ の条件を求めよ．

（2） さらに A, B, C, P が同一円周上にあるとき，$v,\ w$ を u を用いて表せ．ただし $v>0$ とする．

（3） P から直線 AC に垂線 PH を引く．P が (2) の条件を満たしながら動くとき，$\triangle$AHP の面積の最大値とそのときの u の値を求めよ．

【テーマ】：整式の除法

方針

(1) は，成分計算を行い，(2) は，$\angle \mathrm{ABC}=90^\circ$ であることを見抜きます．

♣ ♠

解答

（1） $\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ より，

$$(u-4,\ v,\ w)=s\left(-\frac{16}{5},\ 2,\ \frac{12}{5}\right)+t(-4,\ 0,\ 3)$$

成分を比較して，

$$\begin{cases} u-4=-\dfrac{16}{5}s-4t & \cdots\cdots ① \\ v=2s & \cdots\cdots ② \\ w=\dfrac{12}{5}s+3t & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

② より，$s=\frac{1}{2}v$ であるから，① より，

$$u-4=-\frac{8}{5}v-4t \iff t=-\frac{1}{4}u-\frac{2}{5}v+1$$

これらが ③ も満たせばよいので，

$$w=\frac{6}{5}v-\frac{3}{4}u-\frac{6}{5}v+3$$

$$\therefore\ \ \boldsymbol{3u+4w=12}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

（2） $\overrightarrow{AB}=\frac{2}{5}(-8,\ 5,\ 6)$，$\overrightarrow{BC}=\frac{1}{5}(-4,\ -10,\ 3)$ であるから，

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{2}{25}(32-50+18)=0$$

よって，$\angle \mathrm{ABC}=90^\circ$ であることがわかる．

ゆえに，$\triangle$ABC の外接円の中心は AC の中点で，$\left(2,\ 0,\ \frac{3}{2}\right)$ であり，半径は $\frac{\mathrm{AC}}{2}=\frac{5}{2}$ である．

したがって，点 P は，球面

$$(x-2)^2+y^2+\left(z-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$$

上にあるので，

$$(u-2)^2+v^2+\left(w-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$$

を満たす．(1) より，$w=-\dfrac{3}{4}u+3$ であるから，これを代入して，

$$(u-2)^2+v^2+\left(-\frac{3}{4}u+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$$

$$\therefore\quad v^2=\frac{25}{16}(4u-u^2)$$

$v>0$ より，

$$\boldsymbol{v=\frac{5}{4}\sqrt{4u-u^2}\ \ (0<u<4)}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AH}}=k\overrightarrow{\mathrm{AC}}\ (k>0)$ とおく．$\mathrm{PH}\perp\mathrm{AC}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{PH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$ であるから，

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{AH}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0\iff k\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2-\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$$

$$\therefore\quad k=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2}=-\frac{1}{4}u+1$$

よって，$\mathrm{AH}=k\mathrm{AC}=5\left(-\dfrac{1}{4}u+1\right)$ である．

$$\begin{aligned}\mathrm{PH}&=\sqrt{\mathrm{AP}^2-\mathrm{AH}^2}\\&=\sqrt{(u-4)^2+v^2+w^2-25\left(-\frac{1}{4}u+1\right)^2}\\&=\frac{5}{4}\sqrt{u(4-u)}\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \triangle\mathrm{AHP}=\frac{1}{2}\mathrm{AH}\cdot\mathrm{PH}=\frac{25}{32}\sqrt{u(4-u)^3}$$

$f(u)=u(4-u)^3$ とおくと，

$$f'(u)=4(1-u)(4-u)^2$$

であるから，$0<u<4$ で $f'(u)=0$ となるのは，$u=1$ のときである．

u	0	$\cdots$	1	$\cdots$	4
$f'(u)$		$+$	0	$-$	
$f(u)$		↗	27	↘	

よって，$u=1$ のとき，$f(u)$ は最大値 27 をとるので，$\triangle\mathrm{AHP}$ の最大値は，

$$\frac{25}{32}\sqrt{27}=\boldsymbol{\frac{75\sqrt{3}}{32}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

◇ ♡

解説

$\triangle\mathrm{AHP}$ の最大値を求める際は，根号内を $f(u)$ とおいて，根号内の最大値を求めましょう．特に，理系の人で数学 Ⅲ の微分を学習すると $f(u)=\sqrt{u(4-u)^3}$ とおいて微分して最大値を求める人が出てきますが，面倒な計算の挙句に計算間違いを起こしかねません．ちょっとした工夫が計算量を減らし楽に回答できるのです．
例えば，$f(x)=\cos x\sqrt{1-\sin x}\ \left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ の最大値を求めよという問題はどのように求めますか？文系の人も考えてみてください．