13 （'13　お茶の水女子大） 【難易度】 … 標準

O を原点とする座標平面上の円 $x^2+y^2-10x-10y+49=0$ を C とする．原点 O を通り，円 C に接する直線のうち，傾きの大きい方を ℓ とする．

（1） ℓ の傾きを求めよ．

（2） x 軸に接し，円 C と外接するような円の中心 P の描く軌跡を求めよ．

（3） 直線 ℓ と x 軸に接し，さらに円 C と外接する円の半径をすべて求めよ．

【テーマ】：円と直線の位置関係

方針

円と直線が接するときは，円の中心と直線までの距離が円の半径と一致するときです．2 円が外接するときは，それぞれの円の中心間の距離が半径の和と一致します．

♣ ♠

解答

（1） $C：(x-5)^2+(y-5)^2=1$ であるから，この円の中心は $(5, 5)$ であり，半径は 1 である．
ℓ の傾きを k とすると，ℓ の方程式は $y=kx$ と表せる．ℓ と C が接するとき，点 $(5, 5)$ と直線 ℓ との距離が円の半径 1 と一致するので，

$$\frac{|5k-5|}{\sqrt{k^2+1}}=1 \iff 5|k-1|=\sqrt{k^2+1}$$

両辺 2 乗して整理すると，

$$25(k-1)^2=k^2+1 \iff 12k^2-25k+12=0$$

$$\therefore\ (3k-4)(4k-3)=0$$

より，$k=\frac{4}{3},\ \frac{3}{4}$ を得る．大きい方が ℓ の傾きなので，直線 ℓ の傾きは，$\boldsymbol{\frac{4}{3}}$……(**答**)

（2） $\mathrm{P}(X, Y)$ とおくと，P を中心とする円が x 軸と接するので，その半径は Y となる．一方，円 C と外接するとき，2 円の中心間の距離が半径の和と一致するので，

$$\sqrt{(X-5)^2+(Y-5)^2}=Y+1$$

$$(X-5)^2+(Y-5)^2=(Y+1)^2 \iff Y=\frac{1}{12}(X-5)^2+2 \cdots\cdots ①$$

ゆえに，P の描く軌跡は，

放物線：$\boldsymbol{y=\frac{1}{12}(x-5)^2+2}$……(答)

（3） （2）の ① を満たし，さらに点 (X, Y) と ℓ の距離が Y となれば題意を満たすので，

$$\frac{\left|\frac{4}{3}X-Y\right|}{\sqrt{\frac{16}{9}+1}}=Y \iff \left|\frac{4}{3}X-Y\right|=\frac{5}{3}Y$$

$$\frac{4}{3}X-Y=\frac{5}{3}Y \text{ または } \frac{4}{3}X-Y=-\frac{5}{3}Y$$

すなわち，$X=2Y$ または $X=-\frac{1}{2}Y$ である．

(i) $X=2Y$ のとき，① から，

© 大学受験・数学塾　管理人：makoto

$$Y=\frac{1}{12}(2Y-5)^2+2 \iff 4Y^2-32Y+49=0$$

$$Y=\frac{16\pm2\sqrt{15}}{4}=\frac{8\pm\sqrt{15}}{2}$$

(ii) $X=-\frac{1}{2}Y$ のとき，① から，

$$Y=\frac{1}{12}\left(-\frac{1}{2}Y-5\right)^2+2 \iff Y^2-28Y+196=0$$

$$(Y-14)^2=0$$

よって，$Y=14$ である．

以上より，求める円の半径は，

$$\boldsymbol{\frac{8\pm\sqrt{15}}{2},\ 14}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

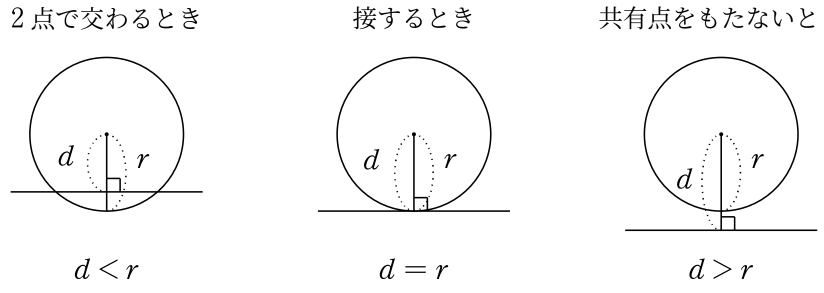
解説

円と直線，円と円の位置関係をテーマとした問題は頻出です．本問は，接するときをメインに扱っていますので，円と直線，円と円が接するときの条件を考えます．

円と直線が接するとき，代入して判別式へ持っていく人が多くいますが，それでは計算量が多くなることもあり，あまりお勧めできません．解答のように，円の中心と直線までの距離が半径と等しくなることを用いれば，点と直線の距離公式だけで処理ができます．また，円同士が接するときも中心間の距離と半径の和が一致することを用いましょう．

【円と直線の位置関係】

円の半径を r とし，円の中心と直線までの距離を d とすると，d と r には次の関係がある．



© 大学受験・数学塾　管理人：makoto