11 ('06 小樽商科大) **【難易度】** … 標準

p, q を実数とし，$p<q$ とする．さらに，3 つの数 4, p, q をある順に並べると等比数列となり，ある順に並べると等差数列となるとする．このとき，p, q の組 (p, q) をすべて求めよ．

【テーマ】：等差中項・等比中項

方針

全パターンを場合分けで求めることもできますが，p, q の符号を考えると，3 数の中項はどれかが明確になるので，場合分けが減らせます．

♣ ♠

解答

(i) $0<4<p<q$ のとき，

$$4+q=2p \cdots\cdots ①$$

が成り立ち，このとき，等比中項は p であるから，

$$4q=p^2 \cdots\cdots ②$$

①, ② より，

$$p^2-8p+16=0 \iff (p-4)^2=0$$

よって，$p=4$, $q=4$ となり，不適．

(ii) $0<p<4<q$ のとき，

$$p+q=8 \cdots\cdots ③$$

が成り立ち，このとき，等比中項は 4 であるから，

$$pq=16 \cdots\cdots ④$$

③, ④ より，p, q を 2 解にもつ 2 次方程式は，

$$x^2-8x+16=0 \iff (x-4)^2=0$$

よって，$p=4$, $q=4$ となり，不適．

(iii) $0<p<q<4$ のとき，

$$p+4=2q \cdots\cdots ⑤$$

が成り立ち，このとき，等比中項は q であるから，

$$4p=q^2 \cdots\cdots ⑥$$

⑤, ⑥ より，

$$q^2-8q+16=0 \iff (q-4)^2=0$$

よって，$p=4$, $q=4$ となり，不適．

(iv) $p<0<4<q$ のとき，

$$p+q=8 \cdots\cdots ⑦$$

が成り立ち，このとき，等比中項は p であるから，

$$4q=p^2 \cdots\cdots ⑧$$

⑦, ⑧ より，

$$p^2+4p-32=0 \iff (p+8)(p-4)=0$$

$p<0$ であるから，$p=-8$, $q=16$ となり，これは条件を満たす．

(v) $p<0<q<4$ のとき，

$$p+4=2q \cdots\cdots ⑨$$

が成り立ち，このとき，等比中項は p であるから，

$$4q=p^2 \cdots\cdots ⑩$$

⑨, ⑩ より，

$$p^2-2p-8=0 \iff (p-4)(p+2)=0$$

$p<0$ であるから，$p=-2$, $q=1$ となり，これは条件を満たす．

(vi) $p<q<0<4$ のとき，

$$p+4=2q \cdots\cdots ⑪$$

が成り立ち，このとき，等比中項は 4 であるから，

$$pq=16 \cdots\cdots ⑫$$

⑪, ⑫ より，

$$q^2-2q-8=0 \iff (q-4)(q+2)=0$$

$q<0$ であるから，$q=-2$, $p=-8$ となり，これは条件を満たす．

以上より，求める p, q の組は，

$$\boldsymbol{(p, q)=(-8, 16),\ (-2, 1),\ (-8, -2)}\cdots\cdots\textbf{(答)}$$

◇ ♡

解説

(iv), (v), (vi) では，等比中項がどれになるかよく考えましょう．等差数列は大小関係ですぐに等差中項がわかりますが，等比数列は，同符号なら大小のままですが，異符号の数がある場合は，大小のままにはなりません．それは，公比が負になっているためです．したがって，(iv), (v) では，p が，(vi) では 4 が等比中項となります．

$p, q, 4$ とその大小関係をとりあえず無視して計算を行い，最後に大小関係をつけて求めると次のようになります．

別解

3 数 a, b, c がこの順に等差数列をなすとき，

$$a+c=2b \cdots\cdots Ⓐ$$

が成り立つ．さらに，a, b, c を適当に並べたものが等比数列をなすとき，Ⓐ が a, c に関して対称であるから，等比中項は a, b のいずれかを考えればよい．

(i) a が等比中項のとき，

$bc=a^2$ であるから，Ⓐ を用いて c を消去すると，

$$a^2+ba-2b^2=0 \iff (a+2b)(a-b)=0$$

を得るが，$a=b$ のときは，$a=b=c$ となるので不適．したがって，$a=-2b$ のときを考える．このとき，$c=4b$ となるので，

- $a=4$ のとき，$b=-2, c=-8$ であるから，$(p, q)=(-8, -2)$
- $b=4$ のとき，$a=-8, c=16$ であるから，$(p, q)=(-8, 16)$
- $c=4$ のとき，$a=-2, b=1$ であるから，$(p, q)=(-2, 1)$

(ii) b が等比中項のとき，

$ac=b^2$ であるから，a, c を 2 解とする 2 次方程式は，

$$x^2-2bx+b^2=0 \iff (x-b)^2=0$$

ゆえに，$a=b=c$ となるので，不適．

以上より，求める p, q の組は，

$(p, q)=(-8, 16), (-2, 1), (-8, -2)$……(答)