10 （'69　岡山大） **【難易度】** … 標準

平面上の動点 P の x 座標，y 座標がともに時刻 t の微分可能な関数で

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \qquad (t \geqq 0)$$

と表される．ただし，$g(t) > f(t)$，$f(0) = 1$ かつ $f(t)$ は t の増加関数とする．時刻 t における点 P の速度の大きさは $\sqrt{2(2t^2+6t+5)}$ で，点 P と直線 $y = x$ との距離は $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(t+1)^2$ である．このとき，関数 $f(t)$, $g(t)$ を定め，点 P のえがく曲線を xy 平面上に図示せよ．

【テーマ】：速度

方針

点 P の速度の大きさと点 P と直線 $y = x$ との距離から $f'(t)$ と $g'(t)$ の連立方程式を導きます．

♣ ♠

解答

点 P の速度の大きさは，$\sqrt{\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2}$ であるから，題意より，

$$\sqrt{\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2} = \sqrt{2(2t^2+6t+5)}$$

が成り立つ．両辺正であるから 2 乗して，

$$\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2 = 2(2t^2+6t+5) \cdots\cdots ①$$

一方，点 P と直線 $y = x$ との距離は，

$$\frac{|f(t) - g(t)|}{\sqrt{1+1}} = \frac{g(t) - f(t)}{\sqrt{2}} \quad (\because \ \ g(t) > f(t))$$

であるから，題意より，

$$\frac{g(t) - f(t)}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(t+1)^2 \quad \Longleftrightarrow \quad g(t) - f(t) = (t+1)^2 \cdots\cdots ②$$

両辺を t で微分すると，

$$g'(t) - f'(t) = 2(t+1) \cdots\cdots ③$$

①, ③ より，

$$\{f'(t)\}^2 + \{f'(t) + 2(t+1)\}^2 = 2(2t^2+6t+5)$$
$$\{f'(t)\}^2 + \{f'(t)\}^2 + 4(t+1)f'(t) + 4(t+1)^2 = 4t^2+12t+10$$
$$2\{f'(t)\}^2 + 4(t+1)f'(t) - 4t - 6 = 0$$
$$\{f'(t) - 1\}\{f'(t) + 2t + 3\} = 0$$

$f(t)$ は t の増加関数なので，$f'(t) > 0$ であり，$t \geqq 0$ であることから，

$$f'(t) = 1$$

である．したがって，$f(t) = t + C$（C は定数）と表される．$f(0) = 1$ であるから，$C = 1$ となるので，

$$f(t) = t + 1$$

である．よって，② より，

$$g(t) = (t+1)^2 + f(t) = (t+1)^2 + (t+1)$$

$$\therefore \quad g(t) = t^2 + 3t + 2$$

以上より，

$$\begin{cases} \boldsymbol{f(t) = t + 1} \\ \boldsymbol{g(t) = t^2 + 3t + 2} \end{cases} \cdots\cdots(\textbf{答})$$

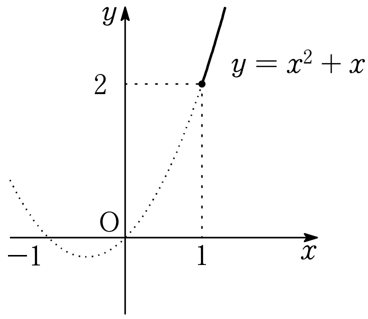
$x = f(t),\, y = g(t)$ であるから，t を消去すると，

$$y = x^2 + x$$

であり，$t \geqq 0$ より，$x \geqq 1$ である．ゆえに，点 P がえがく曲線は，

$$\text{放物線} \;:\; y = x^2 + x \;\;(x \geqq 1)$$

である．グラフは右図太線部分．



◇ ♡

解説

前半には速度に関する記述がありますが，立式ができれば連立方程式から $f(t),\, g(t)$ を求める問題になります．$f'(t) = 1$ のように微分を含んだ方程式を微分方程式といいます．本問では不定積分すれば簡単に解けるので，微分方程式の知識がなくても容易に解けるでしょう．本問のポイントは，$f(t)$ が t の増加関数であるという問題の条件をしっかりと解答に生かせているか？すなわち $f'(t) = -2t - 3$ は不適であることを議論できているかにあります．