9 （'11　広島大）　**【難易度】** … 標準

(1)　$\log_2 3 = \dfrac{m}{n}$ を満たす自然数 m, n は存在しないことを証明せよ．

(2)　p, q を異なる自然数とするとき，$p\log_2 3$ と $q\log_2 3$ の小数部分は等しくないことを証明せよ．

(3)　$\log_2 3$ の値の小数第 1 位を求めよ．

【テーマ】：背理法

方針

(1) では，$\log_2 3 = \dfrac{m}{n}$ とおくことで矛盾を導きます．(2) では，2 数の小数部分が等しいということは，2 数の差が整数であればよいことに気付き (1) の結果から背理法で示します．(3) は，不等式を利用してうまく大小関係を作ります．

♣　♠

解答

(1)　**【証明】**

$\log_2 3 = \dfrac{m}{n} \iff 3 = 2^{\frac{m}{n}} \iff 3^n = 2^m$

m, n が自然数であることから，左辺は奇数であり，右辺は偶数であるから矛盾．ゆえに，題意は示された．

（証明終）

(2)　**【証明】**

$p\log_2 3$ と $q\log_2 3$ の小数部分が等しいと仮定すると，2 数の差

$$|p\log_2 3 - q\log_2 3| = |p-q|\log_2 3$$

は自然数となるので，k を自然数として，

$$|p-q|\log_2 3 = k$$

とおける．$p-q \neq 0$ であるから，

$$\log_2 3 = \frac{k}{|p-q|}$$

となるが，(1) よりこれを満たす自然数 k, $|p-q|$ は存在しないので，$p\log_2 3$ と $q\log_2 3$ の小数部分は等しくないことが示された．

（証明終）

(3)　$2^3 < 3^2$ において，両辺に底が 2 の対数をとると，

$$3 < \log_2 3^2 \iff 1.5 < \log_2 3$$

一方，$3^5 < 2^8$ において，両辺に底が 2 の対数をとると，

$$\log_2 3^5 < 8 \iff \log_2 3 < 1.6$$

ゆえに，

$$1.5 < \log_2 3 < 1.6$$

となるので，$\log_2 3$ の小数第 1 位は **5**……**（答）**

◇　♡

解説

(1) は,「$\log_2 3$ が無理数であることを証明せよ.」という問題です.背理法の基本なので完答したい問題です.背理法は,結論を否定して矛盾を導く論法です.この問題では,$\log_2 3 = \dfrac{m}{n}$ を満たす自然数 m, n は存在しないことを示したいので,それを否定したもの,すなわち m, n が存在するとして計算を進めて矛盾を導きます.実際に,$3^n = 2^m$ という形が出てくるので,(奇数)=(偶数)という矛盾した式になり,自然数 m, n は存在しないことになります.

(2) は,2 数の小数部分が等しいことは,2 数の差が整数であることと同値なので,それに気付くことがポイントです.あとは (1) の結果をうまく利用できるかどうかです.

(3) は,解答のように $2^3 < 3^2$ や $3^5 < 2^8$ という不等式から底を 2 とする対数をとって大小を比較してもよいですし,次のように $10\log_2 3$ を考えてその整数部分の 1 の位の数を求めてもよいです.

別解

(3) $\log_2 3$ の小数第 1 位の数は,$10\log_2 3$ の整数部分の一の位と一致する.a を整数とするとき,

$$a \leqq 10\log_2 3 < a+1$$

を満たす a を求めればよい.

$$a \leqq 10\log_2 3 < a+1 \iff \log_2 2^a \leqq \log_2 3^{10} < \log_2 2^{a+1} \iff 2^a \leqq 3^{10} < 2^{a+1}$$

である.ここで,

$$3^{10} = 59049,\quad 2^{15} = 32768,\quad 2^{16} = 65536$$

より,$a = 15$ である.したがって,

$$10\log_2 3 = 15.\cdots\cdots \iff \log_2 3 = 1.5\cdots\cdots$$

であるから,$\log_2 3$ の小数第 1 位は **5**……(**答**)