8 （'91　大阪大） 【難易度】 … 標準

放物線 $y=ax^2-bx+b$ と直線 $y=a^2x$ を考える．この放物線と直線は 2 交点 P, Q をもち，P と Q の x 座標の差の絶対値は 1 であるという．ただし $a>0$ とする．放物線の一部である弧 PQ 上の点と直線の距離の最大値を d とする．

（1） d を a を用いて表せ．

（2） d を最大にする a と b の値を求めよ．

【テーマ】：放物線と直線

方針

P, Q の x 座標をそれぞれ p, q とし，解と係数の関係から p, q の関係式を求めます．

解答

（1） 点 P, Q の x 座標をそれぞれ $p, q\ (p<q)$ とすると，題意より，

$$q-p=1 \cdots\cdots ①$$

が成り立つ．このとき，p, q は

$$ax^2-bx+b=a^2x \iff ax^2-(a^2+b)x+b=0 \cdots\cdots ②$$

の 2 解であるから，解と係数の関係より，

$$\begin{cases} p+q=\dfrac{a^2+b}{a} & \cdots\cdots ③ \\ pq=\dfrac{b}{a} & \cdots\cdots ④ \end{cases}$$

が成り立つ．

次に，$y=ax^2-bx+b$ 上の点 $(t,\ at^2-bt+b)$ と $y=a^2x$ の距離を h とすると，

$$h=\frac{|at^2-bt+b-a^2t|}{\sqrt{a^4+1}}=\frac{|a(t-p)(t-q)|}{\sqrt{a^4+1}}\quad (\because\ ③, ④)$$

よって，h が最大となるのは，$t=\dfrac{p+q}{2}$ のときで，このとき，

$$\begin{aligned} d&=\frac{\left|a\left(\dfrac{p+q}{2}-p\right)\left(\dfrac{p+q}{2}-q\right)\right|}{\sqrt{a^4+1}} \\ &=\frac{a|(q-p)(p-q)|}{4\sqrt{a^4+1}} \\ &=\frac{a(q-p)^2}{4\sqrt{a^4+1}} \\ &=\boldsymbol{\frac{a}{4\sqrt{a^4+1}}} \cdots\cdots \textbf{(答)}\quad (\because\ ①) \end{aligned}$$

（2） （1）より，$d=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{a^2+\dfrac{1}{a^2}}}$ である．

$a>0$ より，相加平均・相乗平均の関係より，

$$a^2+\frac{1}{a^2}\geqq 2\sqrt{a^2\cdot\frac{1}{a^2}}=2$$

等号は，$a^2=\dfrac{1}{a^2}$ すなわち $a^4=1$ であるから，$a>0$ より，$a=1$ のとき成立する．このとき，② より，

$$x^2-(b+1)x+b=0 \iff (x-b)(x-1)=0$$

よって，$x=1,\,b$ である．① より，

$$b-1=1 \text{ または } 1-b=1$$

すなわち，

$$b=2 \text{ または } b=0$$

であるから，d を最大にする $a,\,b$ の値は，

$$(a,\,b)=(1,\,0),\,(1,\,2)$$

で，このとき d は最大値 $\dfrac{\sqrt{2}}{8}$ をとる．ゆえに，求める $a,\,b$ の値は，

$\boldsymbol{(a,\,b)=(1,\,0),\,(1,\,2)}$……**(答)**

◇ ♡

$\boxed{\text{解説}}$

まずは，点 P, Q の座標を設定することから始めます．放物線と直線の交点なので，$p,\,q$ は 2 次方程式の 2 解であることがわかるので，解と係数の関係を利用しましょう．あとは，条件から式を作って，d を求めます．d が最大となるのは，放物線上の点における接線が直線 $y=a^2x$ に平行になるときであることを理解しておきましょう．h の式変形ですが，③, ④ を用いて簡単に式変形しているように感じますがこれは，$p,\,q$ が ② の方程式の解であることを考えれば容易に解決します．つまり，h の分子だけを見ると，

$$at^2-bt+b-a^2t=0 \text{ の 2 解が } p,\,q \text{ なので，} at^2-bt+b-a^2t=a(t-p)(t-q)$$

と因数分解できるのです．