**7** （'07　名古屋市立大） 【難易度】 … 標準

自然数 $n$ に対して $(n-1)\pi \leqq x \leqq n\pi$ の範囲で関数 $y = e^{-x}\sin x$ と $x$ 軸とで囲まれる図形の面積を $S_n$ とおく．次の問いに答えよ．

(1)　$S_n$ を求めよ．

(2)　$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} S_k$ を求めよ．

**【テーマ】：面積和と極限**

**方針**

$y = e^{-x}\sin x$ は，正の値と負の値を両方とるので，面積を求めるときは，$y = |e^{-x}\sin x|$ を考える必要があります．置換積分を有効に活用すれば絶対値をはずすことができます．

**解答**

(1)　題意より，求める面積 $S_n$ は，

$$S_n = \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} |e^{-x}\sin x|\,dx$$

ここで，$x-(n-1)\pi = t$ とおくと，$dx = dt$ であるから，

| $x$ | $(n-1)\pi$ → $n\pi$ |
|---|---|
| $t$ | $0$ → $\pi$ |

$$\begin{aligned} S_n &= \int_0^{\pi} \left|e^{-t-(n-1)\pi}\sin\{t+(n-1)\pi\}\right| dt \\ &= e^{-(n-1)\pi}\int_0^{\pi} \left|e^{-t}\sin t\cos(n-1)\pi\right| dt \\ &= e^{-(n-1)\pi}\int_0^{\pi} e^{-t}\sin t\,dt \end{aligned}$$

$I = \int_0^{\pi} e^{-t}\sin t\,dt$ とおくと，

$$\begin{aligned} I &= \Big[-e^{-t}\sin t\Big]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} e^{-t}\cos t\,dt \\ &= \Big[-e^{-t}\cos t\Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^{-t}\sin t\,dt \\ &= e^{-\pi}+1-I \end{aligned}$$

$$2I = e^{-\pi}+1$$

$$\therefore\quad I = \frac{1}{2}(e^{-\pi}+1)$$

$$\therefore\quad S_n = \boldsymbol{\frac{1}{2}e^{-(n-1)\pi}(e^{-\pi}+1)}\cdots\cdots(\text{答})$$

(2)　(1) より，

$$\sum_{k=1}^{n} S_k = \sum_{k=1}^{n}\frac{e^{-\pi}+1}{2}(e^{-\pi})^{k-1} = \frac{\frac{e^{-\pi}+1}{2}\{1-(e^{-\pi})^n\}}{1-e^{-\pi}}$$

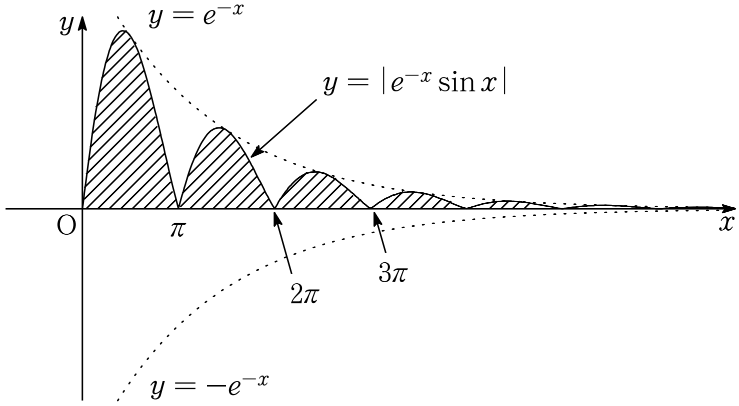
であるから，求める極限値は，

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} S_k &= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{e^{-\pi}+1}{2}\{1-(e^{-\pi})^n\}}{1-e^{-\pi}} \\ &= \frac{e^{-\pi}+1}{2(1-e^{-\pi})} = \boldsymbol{\frac{e^{\pi}+1}{2(e^{\pi}-1)}}\cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

―――――― ♢ ―――――― ♡ ――――――

解説

$y = e^{-x}\sin x$ のグラフは，減衰曲線と呼ばれています．$x \to \infty$ とすれば，振動しながら 0 に収束していくのでそう呼ばれています．この関数は頻出なので，グラフは覚えておきましょう．$y = e^{-x}$ と $y = -e^{-x}$ のグラフに接しながら 0 へ収束していきますが，きちんとした縮尺で図を描くと最初の 2 つくらいの山しか見えずあとは，つぶれてしまいます．したがって，グラフの状況がわかりやすくなるよう縮尺をかえて書かれていることが多いです（下図参照）．




頻出問題でありながら，経験がないと難しい問題でもあります．$S_n$ を求める際には，$|e^{-x}\sin x|$ を積分します．絶対値を忘れないようにしましょう．この絶対値をはずすために，本問では置換積分を利用しています．最初の置換は，区間の平行移動です．$0 \leqq t \leqq \pi$ にすることで $\sin t \geqq 0$ となることを利用すれば絶対値がはずせます．(1) の結果からわかるとおり，数列 $\{S_n\}$ は等比数列となります．すなわち上図の 1 つ 1 つの山の面積は公比 $e^{-\pi}$ で 0 に収束します．