5 （'12　広島大） 【難易度】 … 標準

N は 4 以上の整数とする．次の規則にしたがって 1 個のさいころを繰り返し投げる．

規則：出た目を毎回記録し，偶数の目が 3 回出るか，あるいは奇数の目が N 回出たところで，さいころを投げる操作を終了する．

ただし，さいころの目の出方は同様に確からしいとする．次の問いに答えよ．

（1） さいころを投げる回数は，最大で何回か．

（2） さいころを 3 回投げて操作を終了する確率を求めよ．

（3） さいころを N 回投げて操作を終了する確率を求めよ．

（4） 最後に奇数の目が出て操作を終了する確率を求めよ．

（5） $N=4$ のとき，さいころを投げる回数の期待値を求めよ．

【テーマ】：反復試行の確率と期待値

方針

ある条件を満たすことで試行が終了する問題では，終了する直前の状態を考えることが重要です．

解答

（1） 規則より，偶数が 2 回，奇数が $N-1$ 回出れば，次の 1 回で操作は必ず終了するので，さいころを投げる回数は最大で

$$2+N-1+1=\boldsymbol{N+2}\ \textbf{(回)}\cdots\cdots\textbf{(答)}$$

である．

（2） $N \geqq 4$ より，さいころを 3 回投げて操作が終了するのは，偶数が 3 回続けて出るときのみである．ゆえに，その確率は，

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3=\boldsymbol{\frac{1}{8}}\cdots\cdots\textbf{(答)}$$

（3） さいころを N 回投げて操作が終了するのは，次の 2 通りである．

（i） N 回すべてが奇数のとき，その確率は，

$$\left(\frac{1}{2}\right)^N$$

（ii） 偶数が 3 回含まれるとき，

$N-1$ 回目までで偶数が 2 回，奇数が $N-3$ 回出て，N 回目に偶数が出ればよいので，その確率は，

$${}_{N-1}\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^{N-3}\times\frac{1}{2}=\frac{(N-1)(N-2)}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^N$$

ゆえに，（i），（ii）より求める確率は，

$$\left(\frac{1}{2}\right)^N+\frac{(N-1)(N-2)}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^N=\boldsymbol{\frac{N^2-3N+4}{2^{N+1}}}\cdots\cdots\textbf{(答)}$$

(4) 最後に奇数の目が出て操作が終了するのは，次の 3 通りである．

(i) N 回で終了するとき，N 回ともすべて奇数なので，その確率は，

$$\left(\frac{1}{2}\right)^N$$

(ii) $N+1$ 回で終了するとき，

N 回目までで偶数が 1 回，奇数が $N-1$ 回出て，$N+1$ 回目に奇数が出ればよいので，その確率は，

$${}_N\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{N-1}\times\frac{1}{2}=N\left(\frac{1}{2}\right)^{N+1}$$

(iii) $N+2$ 回で終了するとき，

$N+1$ 回目までで偶数が 2 回，奇数が $N-1$ 回出て，$N+2$ 回目に奇数が出ればよいので，その確率は，

$${}_{N+1}\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^{N-1}\times\frac{1}{2}=\frac{(N+1)N}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{N+2}$$

ゆえに，(i)〜(iii) より求める確率は，

$$\left(\frac{1}{2}\right)^N+N\left(\frac{1}{2}\right)^{N+1}+\frac{(N+1)N}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{N+2}=\boldsymbol{\frac{N^2+5N+8}{2^{N+3}}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

(5) さいころを k 回投げて操作が終了する確率を p_k とする．ただし，$3\leqq k\leqq 6$ である．(2), (3) より，

$$p_3=\frac{1}{8},\quad p_4=\frac{16-12+4}{2^5}=\frac{1}{4}$$

であり，5 回投げて操作が終了するのは，4 回目までに偶数が 2 回，奇数が 2 回出て 5 回目に偶数が出るとき，または 4 回目までに偶数が 1 回，奇数が 3 回出て 5 回目に奇数が出るときであるから，その確率は，

$$\begin{aligned}p_5&={}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}+4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5\quad(\because\ (4)(\text{ii}))\\&=6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5+4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5\\&=\frac{5}{16}\end{aligned}$$

である．さらに，余事象の確率より，

$$p_6=1-(p_3+p_4+p_5)=1-\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{5}{16}\right)=\frac{5}{16}$$

ゆえに，求める期待値 E は，

$$\begin{aligned}E&=3p_3+4p_4+5p_5+6p_6\\&=3\cdot\frac{1}{8}+4\cdot\frac{1}{4}+5\cdot\frac{5}{16}+6\cdot\frac{5}{16}\\&=\boldsymbol{\frac{77}{16}}\cdots\cdots(\textbf{答})\end{aligned}$$

◇ ♡

解説

状況を的確に判断して丁寧に計算をする必要があります．ある条件を満たすことで試行が終了する問題では，その直前の状況を考えることが多くあります．例えば，(3)(ii) で，さいころを N 回投げて終了する場合，偶数が 3 回，奇数が $N-3$ 回出ればよいので，

$${}_N\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^{N-3}$$

とするのは，当然間違いです．なぜならこの中には，N 回目の操作より前に 3 回目の偶数が出てしまう場合を含んでいるからです．偶数が 3 回出れば試行は終了するのでこれでは N 回まで操作をしたことにはなりません．反復試行の確率は，同じ確率になるものが何通りもあるので ${}_n\mathrm{C}_r$ をかけています．反復試行の確率の本質をしっかりと理解しておきましょう．