3 （'56　東北大）　　　　**【難易度】** … 標準

直線 $y=ax$ と放物線 $y=x^2$ とが囲む面積を S_1 とし，この 2 つおよび直線 $x=1$ とが囲む面積を S_2 とするとき，S_1+S_2 が最小となるように a の値を定めよ．また，その最小値はいくらか．ただし，$a<1$ とする．

【テーマ】：微積分の融合

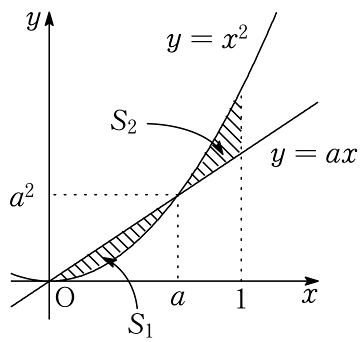
方針

a の符号によって直線の傾きが変わるため交点の x 座標の符号が変わります．そのため積分区間が変化するので，場合分けが必要になります．

♣　♠

解答

(i)　$0 \leqq a < 1$ のとき，



$$
\begin{aligned}
S_1+S_2 &= \int_0^a (ax-x^2)\,dx + \int_a^1 (x^2-ax)\,dx \\
&= \frac{1}{6}a^3 + \left[\,\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}ax^2\,\right]_a^1 \\
&= \frac{1}{6}a^3 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}a - \frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{2}a^3 \\
&= \frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

であるから，$f(a)=\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}$ とおくと，

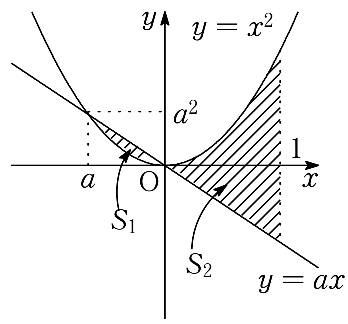
$$f'(a)=a^2-\frac{1}{2}$$

である．よって，$f'(a)=0$ のとき，$a=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ である．したがって，増減表は次のようになる．

a	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$		1
$f'(a)$		$-$	0	$+$	
$f(a)$	$\frac{1}{3}$	↘	$\frac{2-\sqrt{2}}{6}$	↗	$\frac{1}{6}$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3} = \frac{2-\sqrt{2}}{6}$$

(ii)　$a<0$ のとき，



$$
\begin{aligned}
S_1+S_2 &= \int_a^0 (ax-x^2)\,dx + \int_0^1 (x^2-ax)\,dx \\
&= -\frac{1}{6}a^3 + \left[\,\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}ax^2\,\right]_0^1 \\
&= -\frac{1}{6}a^3 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}a \\
&= -\frac{1}{6}a^3 - \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

であるから，$g(a)=-\frac{1}{6}a^3-\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}$ とおくと，

$$g'(a) = -\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2} < 0$$

である．$g(a)$ のグラフは単調減少なので，

$$g(a) > g(0) = \frac{1}{3}$$

(i), (ii) より，$\dfrac{1}{3} > \dfrac{2-\sqrt{2}}{6}$ であるから，求める最小値は，

$$\boldsymbol{\frac{2-\sqrt{2}}{6} \quad \left(a = \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

である．

解説

本問は，直線と放物線で囲まれる部分の面積を求めるので，交点の x 座標を求めます．しかし，a の符号で面積を求める式を作る際，積分区間が変わるため場合分けが必要になります．そのことに気付くことが本問での最大のポイントでしょう．面積計算には，直線と放物線で囲まれる部分の面積を求めるので，次の定積分の公式が使えます．

【定積分の公式】

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0\ (a \neq 0)$ の 2 解を $\alpha, \beta\ (\alpha < \beta)$ とするとき，次式が成り立つ．

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta (ax^2+bx+c)\,dx &= \int_\alpha^\beta a(x-\alpha)(x-\beta)\,dx \\ &= -\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3\end{aligned}$$

教科書や参考書などでは，a がない形で書かれていると思いますが，実際の計算では 2 次の係数をかけるのを忘れる人が多いので，2 次の係数 a をつけた状態で覚えておくとよいでしょう．これは，面積計算をする際によく用いられます．

S_1+S_2 の計算の第 1 項目の計算には上記公式を利用しています．複雑な図の面積を求めるときでもこの公式が使えるかどうかを見極められるようになっておくことが大切です．後半は，面積の最小値を求める問題なので，場合分けをして求めた面積で小さい方が最小値になります．