2 （′61　広島大） 【難易度】 … 基本

点 O_1 を中心として，$\angle XOY$ の 2 辺に接する円 O_1 がある．$OO_1 = 1$, $\angle XOY = \alpha$ とする．いま，線分 OO_1 と円 O_1 の交点を O_2 とし，O_2 を中心として OX, OY に接する円 O_2 をかく．以下同様にして OX, OY に接する円をかくとき，これらの円 $O_1, O_2, \cdots\cdots$ の面積の総和を求めよ．

【テーマ】：無限等比級数の和

方針

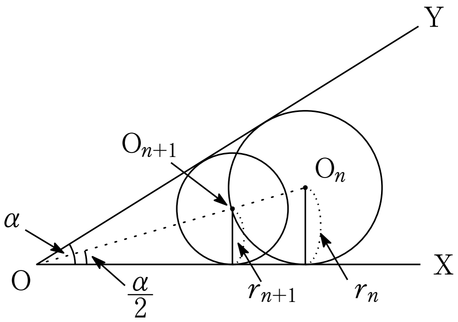
第 n 番目の図形を考えます．相似比を用いて漸化式を立式しましょう．

♣ ♠

解答

円 O_n の半径を r_n とする．このとき，$\angle O_nOX = \dfrac{\alpha}{2}$ であるから，

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{r_n}{OO_n} \iff OO_n = \frac{r_n}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$



一方，$OO_{n+1} = OO_n - r_n$ より，

$$\frac{r_{n+1}}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{r_n}{\sin\frac{\alpha}{2}} - r_n$$

$$r_{n+1} = \left(1 - \sin\frac{\alpha}{2}\right) r_n$$

よって，

$$r_n = r_1\left(1 - \sin\frac{\alpha}{2}\right)^{n-1} = \sin\frac{\alpha}{2}\left(1 - \sin\frac{\alpha}{2}\right)^{n-1} \quad \left(\because \quad r_1 = \sin\frac{\alpha}{2}\right)$$

ゆえに，円 O_n の面積 S_n は，

$$S_n = \pi {r_n}^2 = \pi\sin^2\frac{\alpha}{2}\left(1 - \sin\frac{\alpha}{2}\right)^{2(n-1)}$$

である．したがって，

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} S_n &= \frac{\pi\sin^2\frac{\alpha}{2}}{1 - \left(1 - \sin\frac{\alpha}{2}\right)^2} \\ &= \frac{\pi\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}} \\ &= \boldsymbol{\frac{\pi\sin\frac{\alpha}{2}}{2 - \sin\frac{\alpha}{2}}} \cdots\cdots \textbf{(答)}\end{aligned}$$

♢ ♡

解説

ある規則にしたがって図形を作っていく問題は，等比数列が表れることが多くあります．その際に，辺の長さや面積を求めるため漸化式を立式します．これは，最初の数個の図形で勝手に等比数列であることを決めると減点の対象となるためです．漸化式を作れば等比数列であることもわかるし，一般項を求めることもできます．このようにして辺の長さや面積を計算します．漸化式を立式するときは，n 番目と $n+1$ 番目の図形を考えて，それらの関係を式で表します．本問は，円の半径を r_n として，数列 $\{r_n\}$ に関する漸化式を求めました．