27 （'81　鹿児島大） **【難易度】** … 標準

関数 $y = x - ae^x$ の表す曲線を C とする．ただし，a は $0 < a < \dfrac{1}{e}$ を満たす実数，e は自然対数の底で $e = 2.718\cdots\cdots$ である．

(1) 原点 O から曲線 C へ引いた接線の接点 A の x 座標を求めよ．

(2) 方程式 $x = ae^x$ は $0 < x < 1$ の範囲では，ただ 1 つの解をもつことを証明せよ．

(3) x 軸と曲線 C との交点で，x 座標が $0 < x < 1$ を満たす点を $\mathrm{B}(b,\ 0)$ とする．このとき，曲線 C の弧 AB と線分 OA, OB で囲まれる部分の面積 S を a と b を用いて表せ．

(4) a が，$0 < a < \dfrac{1}{e}$ を満たすすべての実数を動くとき，面積 S を最大にする a の値を求めよ．

【テーマ】：微積分の融合

方針

(2) はグラフの単調性と中間値の定理を用いて示します．(4) は，$a,\ b$ の 2 変数があるので，条件式を用いて a を消去し，S を b の関数として考えます．

♣ ♠

解答

(1) $y' = 1 - ae^x$ より，C 上の点 $(t,\ t - ae^t)$ における接線の方程式は，

$$y = (1 - ae^t)(x - t) + t - ae^t \iff y = (1 - ae^t)x + (at - a)e^t$$

これが原点を通るとき，

$$0 = (at - a)e^t \iff (t - 1)ae^t = 0$$

$ae^t \neq 0$ より，$t = 1$ であるから，接点 A の x 座標は，**1**……(**答**)

(2) **【証明】**

$y' = 1 - ae^x$ で，$0 < a < \dfrac{1}{e}$，$0 < x < 1$ より，

$$0 < ae^x < \frac{1}{e} < 1$$

であるから，$y' > 0$ となり，$y = x - ae^x$ のグラフは単調増加である．$y = f(x)$ として，

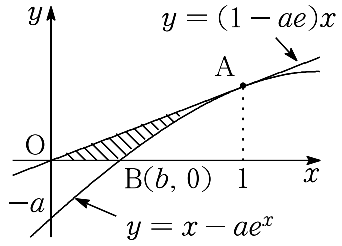
$$f(0) = -a < 0\ ,\quad f(1) = 1 - ae > 0$$

で，$f(x)$ は連続であるから，中間値の定理より，$f(x) = 0$ すなわち $x = ae^x$ は $0 < x < 1$ の範囲にただ 1 つの解をもつ．ゆえに，示された．

(証明終)

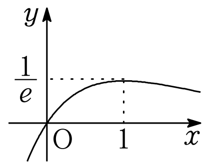
(3) 求める面積は，右図斜線部分であるから，

$$S = \frac{1}{2}\cdot 1 \cdot (1 - ae) - \int_b^1 (x - ae^x)\,dx$$
$$= \frac{1 - ae}{2} - \left[\ \frac{1}{2}x^2 - ae^x\right]_b^1$$
$$= \frac{1 - ae}{2} - \left(\frac{1}{2} - ae - \frac{1}{2}b^2 + ae^b\right)$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{2}ae + \frac{1}{2}b^2 - ae^b}\text{……(答)}$$



(4)　$b=ae^b$ を満たすので，$a=be^{-b}$ であることから，(3) より，

$$S=\frac{1}{2}ebe^{-b}-b+\frac{1}{2}b^2$$



である．ここで，$y=xe^{-x}$ のグラフは右図のようになるので，$0<a<\dfrac{1}{e}$ のとき，(3) より，$0<b<1$ である．

よって，$S=g(b)$ とおくと，$0<b<1$ で $g(b)$ が最大となる b の値を求めればよい．

$$g(b)=\frac{1}{2}be^{-b+1}-b+\frac{1}{2}b^2$$

$$\begin{aligned} g'(b)&=\frac{1}{2}(1-b)e^{-b+1}-1+b \\ &=(b-1)\left(1-\frac{1}{2}e^{-b+1}\right) \end{aligned}$$

$g'(b)=0$ のとき，$b=1,\ 1-\log 2$ であるから，増減表は次のようになる．

b	0	$\cdots$	$1-\log 2$	$\cdots$	1
$g'(b)$		$+$	0	$-$	0
$g(b)$		↗		↘	

よって，$b=1-\log 2$ のとき，$g(b)$ は最大となるので，S は最大である．このとき，

$$\begin{aligned} a&=be^{-b} \\ &=(1-\log 2)e^{-(1-\log 2)} \\ &=(1-\log 2)e^{\log\frac{2}{e}} \\ &=\boldsymbol{\frac{2(1-\log 2)}{e}}\cdots\cdots\textbf{(答)} \end{aligned}$$

である．

◇　♡

解説

(2) は，$y=x-ae^x$ が単調増加であることを示し，連続であることから中間値の定理を利用します．(4) は，(3) で求めた S を利用しますが，$a,\ b$ の 2 変数関数になるので，$b=ae^b$ を用いて a を消去し，b の関数とみて最大値を求めます．