26 （'88　山口大） **【難易度】** … 標準

点 O を原点とする座標平面上の点 P に対し，点 P から直線 $y=1$ に垂線 PQ を引く．

(1)　1 より大きい実数 m に対して，点 P が半直線 $\{(x,\ y)\,|\,x>0,\ \ y=m\}$ 上を動くとき，$\angle$POQ は $\mathrm{P}(\sqrt{m},\ m)$ で最大となることを示せ．

(2)　(1) の最大値が $\dfrac{\pi}{3}$ 以上となる m の範囲を求めよ．

【テーマ】：三角関数の図形への応用

方針

傾きに着目して，tan の加法定理を用います．最大値は，相加平均・相乗平均の関係を利用する方法と判別式を用いる方法があります．

♣ ♠

解答

(1) **【証明】**

$\angle\mathrm{POQ}=\theta$ とする．$\mathrm{P}(p,\ m)$, $\mathrm{Q}(p,\ 1)$ $(p>0)$ とおき，OP, OQ と x 軸の正の方向とのなす角をそれぞれ $\alpha,\ \beta$ とすると，

$$\tan\alpha=\frac{m}{p},\quad \tan\beta=\frac{1}{p}$$

であり，$\theta=\alpha-\beta$ であるから，

$$\begin{aligned}\tan\theta&=\tan(\alpha-\beta)\\&=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\\&=\frac{\frac{m}{p}-\frac{1}{p}}{1+\frac{m}{p}\cdot\frac{1}{p}}\\&=\frac{p(m-1)}{p^2+m}\ \cdots\cdots(*)\\&=\frac{m-1}{p+\frac{m}{p}}\end{aligned}$$

ここで，$p>0$ より，相加平均・相乗平均の関係から，

$$\frac{m-1}{p+\frac{m}{p}}\leqq\frac{m-1}{2\sqrt{p\cdot\frac{m}{p}}}=\frac{m-1}{2\sqrt{m}}$$

等号は，$p=\dfrac{m}{p}$ すなわち $p=\sqrt{m}$ のとき成り立つので，このとき，$\tan\theta$ は最大となる．ゆえに，$\angle$POQ は $\mathrm{P}(\sqrt{m},\ m)$ で最大となることが示された． **(証明終)**

(2)　$\theta\geqq\dfrac{\pi}{3}$ であるから，

$$\tan\theta\geqq\tan\frac{\pi}{3}\quad\Longleftrightarrow\quad\tan\theta\geqq\sqrt{3}$$

(1) より，$\tan\theta\leqq\dfrac{m-1}{2\sqrt{m}}$ であるから，

$$\frac{m-1}{2\sqrt{m}}\geqq\sqrt{3}\quad\Longleftrightarrow\quad m-1\geqq2\sqrt{3m}$$

両辺正であるから，両辺を 2 乗してこれを整理すると，

$$m^2-14m+1\geqq0$$

$\therefore \quad m \leqq 7-4\sqrt{3}, \quad 7+4\sqrt{3} \leqq m$

$m>1$ より，$\boldsymbol{m \geqq 7+4\sqrt{3}}$……(**答**)

◇ ♡

解説

2 直線の傾きが分かり，そのなす角を考えるので，$\tan\theta$ を用います．ここでは，相加平均・相乗平均を用いて最大値を求めましたが，相加平均・相乗平均の関係を思いつかなかったり，使えない場合は以下の解法で求めることができます．こちらも最大値・最小値を求める方法としては重要な手法なので，特に文系の人は分数式の最大値・最小値を求める 1 つの方法としてマスターしておきましょう．

別解

(1) の (*) 以下の解法です．

ここで，$\tan\theta=k$ とおくと，k が最大となるときの p を求めればよい．

$$\frac{p(m-1)}{p^2+m}=k \iff p(m-1)=k(p^2+m) \iff kp^2-(m-1)p+mk=0 \cdots\cdots ①$$

$k \neq 0$ より，判別式を D とすると，p は実数であるから

$$D=(m-1)^2-4mk^2 \geqq 0 \iff k^2 \leqq \frac{(m-1)^2}{4m}$$

$k>0,\ m>1$ より，

$$k \leqq \frac{m-1}{2\sqrt{m}}$$

よって，k の最大値は，$\dfrac{m-1}{2\sqrt{m}}$ となり，このとき，① の重解は，

$$p=\frac{m-1}{2k}=\frac{m-1}{2\cdot\dfrac{m-1}{2\sqrt{m}}}=\sqrt{m}$$

である．ゆえに，$p=\sqrt{m}$ のとき，k は最大となるので，$\tan\theta$ すなわち $\angle \mathrm{POQ}$ は最大となる．

別解で，① の重解を求めていますが，次のことを用いています．

参考

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0\ (a \neq 0)$ の重解は，$x=-\dfrac{b}{2a}$ である．

これは，2 次方程式 $ax^2+bx+c=0\ (a \neq 0)$ の解が，

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a} \quad (D \text{ は判別式})$$

で与えられ，重解は $D=0$ のときであることから導かれる．