23 （'66　神戸大） **【難易度】** … 標準

曲線 $(1+a^2)x^2+y^2-2axy+(2a-4)x-2y+1=0$ (a は定数) について，次の問いに答えよ．

（1） この曲線の囲む面積を求めよ．

（2） この曲線が x 軸と交わらないのは，a がどんな範囲にあるときか．

（3） $a=1$ のとき，この曲線が x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ．

【テーマ】：回転体の体積

方針

与えられている曲線の方程式は，その形から楕円であると推測できるので，y の式と見なして方程式を解きます．(3) は (2) がヒントになっています．

解答

（1） 与えられた方程式を y について整理すると，

$$y^2-2(ax+1)y+(a^2+1)x^2+(2a-4)x+1=0$$

y について解くと，

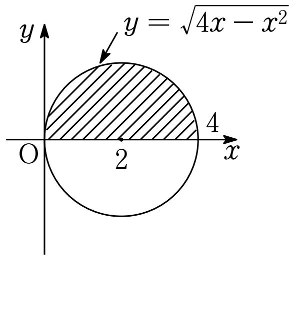
$$\begin{aligned} y &= ax+1\pm\sqrt{(ax+1)^2-\{(a^2+1)x^2+(2a-4)x+1\}} \\ &= ax+1\pm\sqrt{a^2x^2+2ax+1-(a^2x^2+x^2+2ax-4x+1)} \\ &= ax+1\pm\sqrt{4x-x^2} \end{aligned}$$

よって，x のとり得る値の範囲は，$4x-x^2\geqq 0$ から，

$$0\leqq x\leqq 4$$

である．ゆえに，求める面積 S は，

$$\begin{aligned} S &= \int_0^4\left\{ax+1+\sqrt{4x-x^2}-\left(ax+1-\sqrt{4x-x^2}\right)\right\}dx \\ &= \int_0^4 2\sqrt{4x-x^2}\,dx \end{aligned}$$



ここで，$\displaystyle\int_0^4\sqrt{4x-x^2}\,dx$ は，右図斜線部分の面積を表しているので，

$$S=2\cdot\pi\cdot 2^2\cdot\frac{1}{2}=\boldsymbol{4\pi}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

（2） 与えられた方程式で $y=0$ とすると，

$$(a^2+1)x^2+2(a-2)x+1=0$$

となり，x 軸と交わらないためには，この x に関する方程式が実数解を持たなければよい．よって，判別式を D とすると，

$$D/4=(a-2)^2-(a^2+1)<0 \iff -4a+3<0$$

$$\therefore\ \boldsymbol{a>\frac{3}{4}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

(3) $a=1$ のとき，(2) よりこの曲線は x 軸と共有点を持たないので，求める回転体の体積 V は，

$$
\begin{aligned}
V &= \pi\int_0^4 \left\{\left(x+1+\sqrt{4x-x^2}\right)^2-\left(x+1-\sqrt{4x-x^2}\right)\right\}dx\\
&= \pi\int_0^4 (2x+2)\cdot 2\sqrt{4x-x^2}\,dx\\
&= 4\pi\int_0^4 (x+1)1\sqrt{4-(2-x)^2}\,dx
\end{aligned}
$$

ここで，$2-x=2\sin\theta$ とおくと，

$$-dx = 2\cos\theta\,d\theta$$

x	0	$\to$	4
θ	$\frac{\pi}{2}$	$\to$	$-\frac{\pi}{2}$

であるから，

$$
\begin{aligned}
V &= 4\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} (3-2\sin\theta)\sqrt{4-4\sin^2\theta}\cdot(-2\cos\theta)\,d\theta\\
&= 4\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (3-2\sin\theta)\cdot 2\cos\theta\cdot 2\cos\theta\,d\theta\\
&= 16\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (3-2\sin\theta)\cos^2\theta\,d\theta\\
&= 16\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (3\cos^2\theta-2\sin\theta\cos^2\theta)\,d\theta\\
&= 16\pi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(3\cdot\frac{1+\cos 2\theta}{2}-2\sin\theta\cos^2\theta\right)d\theta\\
&= 16\pi\left[\frac{3}{2}\theta+\frac{3}{4}\sin 2\theta+\frac{2}{3}\cos^3\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\\
&= 16\pi\cdot\frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\\
&= \boldsymbol{24\pi^2}\cdots\cdots\textbf{(答)}
\end{aligned}
$$

◇ ♡

解説

(1) では，曲線の概形がわからず立式に戸惑うかもしれませんが，与えられた方程式は楕円を回転させたものなので，y について解いてしまえば立式することができます．積分計算では，半円の面積を利用しましたが，(3) の計算で行っているように，$2-x=2\sin\theta$ という置換を行っても計算できます．

(3) は，置換積分を利用しましょう．根号内を $\sqrt{4-(2-x^2)^2}$ という形に平方完成することがポイントです．基本的な積分計算なので必ずできるようにしておきましょう．また，三角関数の積分計算では，以下の公式を用いています．証明は，右辺を微分すれば容易にできます．

公式 **【三角関数の積分公式】**

$$\int \sin\theta\cos^n\theta\,d\theta = -\frac{1}{n+1}\cos^{n+1}\theta + C$$

$$\int \cos\theta\sin^n\theta\,d\theta = \frac{1}{n+1}\sin^{n+1}\theta + C$$

(C は積分定数)