22 （'08　福井大） 【難易度】 … 標準

空間内に OA $=$ OB $=$ OC $= 1$ である四面体 OABC があり，$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とすると，

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{2}{3},\quad \vec{b} \cdot \vec{c} = \frac{1}{6},\quad \vec{c} \cdot \vec{a} = -\frac{1}{2}$$

を満たしている．また，△OAB, △OBC の重心をそれぞれ D, E とし，正の数 t に対して，線分 AE, CD を $1 : t$ に内分する点をそれぞれ M, N とする．さらに，直線 OM, ON と平面 ABC の交点をそれぞれ P, Q とおく．このとき，以下の問いに答えよ．

（1） 4 点 A, C, M, N は同一平面上にあることを証明せよ．

（2） $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ をそれぞれ t, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ．

（3） 3 点 O, P, Q が直角三角形の 3 頂点になるときの t の値をすべて求めよ．

【テーマ】：内積の計算

方針

(1), (2) は，共面条件を利用します．(3) は直角三角形なので内積を利用しますが，3 通り考えられるので場合分けを行います．

♣ ♠

解答

（1） **【証明】**

点 D, E はそれぞれ △OAB, △OBC の重心であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{3}\ ,\quad \overrightarrow{\mathrm{OE}} = \frac{\vec{b} + \vec{c}}{3}$$

である．一方，点 M, N はそれぞれ線分 AE, CD を $1 : t$ に内分する点であるから，

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{t\vec{a} + \overrightarrow{\mathrm{OE}}}{t+1} = \frac{3t\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3(t+1)} \qquad \overrightarrow{\mathrm{ON}} = \frac{t\vec{c} + \overrightarrow{\mathrm{OD}}}{t+1} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + 3t\vec{c}}{3(t+1)}$$

よって，

$$\overrightarrow{\mathrm{MN}} = \overrightarrow{\mathrm{ON}} - \overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{1-3t}{3(t+1)}\left(\vec{a} - \vec{c}\right) = \frac{3t-1}{3(t+1)}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

となるので，$\overrightarrow{\mathrm{MN}} \parallel \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ である．ゆえに，4 点 A, C, M, N は同一平面上にあることが示された． **（証明終）**

（2） 題意より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = k\overrightarrow{\mathrm{OM}}$（$k$ は実数）とおくことができるので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{3tk}{3(t+1)}\vec{a} + \frac{k}{3(t+1)}\vec{b} + \frac{k}{3(t+1)}\vec{c}$$

であり，4 点 P, A, B, C が同一平面上にあることから，

$$\frac{3tk}{3(t+1)} + \frac{k}{3(t+1)} + \frac{k}{3(t+1)} = 1 \iff k = \frac{3(t+1)}{3t+2}$$

ゆえに，

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{3t\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3t+2}} \cdots\cdots\textbf{（答）}$$

同様に，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=l\overrightarrow{\mathrm{ON}}$（$l$ は実数）とおくことができるので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{l}{3(t+1)}\vec{a}+\frac{l}{3(t+1)}\vec{b}+\frac{3tl}{3(t+1)}\vec{c}$$

であり，4 点 Q, A, B, C が同一平面上にあることから，

$$\frac{l}{3(t+1)}+\frac{l}{3(t+1)}+\frac{3tl}{3(t+1)}=1 \iff l=\frac{3(t+1)}{3t+2}$$

ゆえに，

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+3t\vec{c}}{3t+2}}\cdots\cdots\text{(**答**)}$$

(3) (2) より，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\dfrac{(1-3t)\left(\vec{a}-\vec{c}\right)}{3t+2}$ である．ただし，$t \fallingdotseq \dfrac{1}{3}$ である．

(i) $\angle\mathrm{POQ}=90^\circ$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=0$ より，

$$\left(\frac{3t\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3t+2}\right)\cdot\left(\frac{\vec{a}+\vec{b}+3t\vec{c}}{3t+2}\right)=0 \iff \left(3t\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}+3t\vec{c}\right)=0$$

$\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=\left|\vec{c}\right|=1,\ \vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{2}{3},\ \vec{b}\cdot\vec{c}=\dfrac{1}{6},\ \vec{c}\cdot\vec{a}=-\dfrac{1}{2}$ を用いて展開し整理すると，

$$-\frac{9}{2}t^2+\frac{9}{2}t=0 \iff t=0,\ 1$$

(ii) $\angle\mathrm{QPO}=90^\circ$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{PO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=0$ より，

$$\left(-\frac{3t\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3t+2}\right)\cdot\left(\frac{(1-3t)\left(\vec{a}-\vec{c}\right)}{3t+2}\right)=0 \iff \left(3t\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{c}\right)=0$$

(i) と同様にして，

$$\frac{9}{2}t-\frac{7}{3}=0 \iff t=\frac{14}{27}$$

(iii) $\angle\mathrm{OQP}=90^\circ$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{QO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QP}}=0$ より，

$$\left(-\frac{\vec{a}+\vec{b}+3t\vec{c}}{3t+2}\right)\cdot\left(-\frac{(1-3t)\left(\vec{a}-\vec{c}\right)}{3t+2}\right)=0 \iff \left(\vec{a}+\vec{b}+3t\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{c}\right)=0$$

(i) と同様にして，

$$\frac{9}{2}t-\frac{2}{3}=0 \iff t=\frac{4}{27}$$

(i)〜(iii) と $t>0$ であることから，求める t の値は，

$$\boldsymbol{t=1,\ \frac{4}{27},\ \frac{14}{27}}\cdots\cdots\text{(**答**)}$$

◇ ♡

解説

共面条件と内積の計算がメインの計算問題です．丁寧な計算を心がけましょう．(3) では，△OPQ が直角三角形になるのは，3 通り考えられるので，場合分けが必要になります．