21 （'05　横浜国立大） 【難易度】 … 標準

xy 平面上に曲線 $C: y = x^2 - \dfrac{5}{4}$ がある．C 上の異なる 2 点 P, Q の x 座標を p, q とする．P, Q における C の 2 本の接線の交点を R とし，3 点 P, Q, R を通る円の中心の座標を (X, Y) とする．

（1） X, Y を p, q で表せ．

（2） $p - q = 1$ のとき，X^2 を Y の式で表せ．

【テーマ】：放物線と直線

方針

外心は，各辺の垂直二等分線の交点です．

♣ ♠

解答

（1） $y' = 2x$ より，点 P における接線 ℓ の方程式は，

$$y = 2p(x-p) + p^2 - \frac{5}{4} \iff y = 2px - p^2 - \frac{5}{4}$$

同様にして，点 Q における接線 m の方程式は，

$$y = 2qx - q^2 - \frac{5}{4}$$

よって，ℓ, m の交点の x 座標は，

$$2px - p^2 - \frac{5}{4} = 2qx - q^2 - \frac{5}{4} \iff 2(p-q)x = p^2 - q^2$$

$p \neq q$ であるから，$x = \dfrac{p+q}{2}$ を得る．ゆえに，点 R の座標は，

$$\mathrm{R}\left(\frac{p+q}{2},\ pq - \frac{5}{4}\right)$$

外心は，各辺の垂直二等分線の交点であるから，線分 PQ と線分 PR の垂直二等分線を求める．直線 PQ の傾きは，$p+q$ で，線分 PQ の中点は，$\left(\dfrac{p+q}{2},\ \dfrac{p^2+q^2-\frac{5}{2}}{2}\right)$ であるから，線分 PQ の垂直二等分線の方程式は，

$$y = -\frac{1}{p+q}\left(x - \frac{p+q}{2}\right) + \frac{p^2+q^2-\frac{5}{2}}{2}$$

$$\therefore\ y = -\frac{1}{p+q}x + \frac{2p^2+2q^2-3}{4} \ \cdots\cdots ①$$

また，直線 PR の傾きは，$2p$ で，線分 PR の中点は，$\left(\dfrac{3p+q}{4},\ \dfrac{p^2+pq-\frac{5}{2}}{2}\right)$ であるから，線分 PR の垂直二等分線の方程式は，

$$y = -\frac{1}{2p}\left(x - \frac{3p+q}{4}\right) + \frac{2p^2+2pq-5}{4}$$

$$\therefore\ y = -\frac{1}{2p}x + \frac{4p^3+4p^2q-7p+q}{8p} \ \cdots\cdots ②$$

①, ② の交点が (X, Y) であるから，

$$-\frac{1}{p+q}X + \frac{2p^2+2q^2-3}{4} = -\frac{1}{2p}X + \frac{4p^3+4p^2q-7p+q}{8p}$$

$$\left(\frac{1}{2p}-\frac{1}{p+q}\right)X=\frac{4p^3+4p^2q-7p+q}{8p}-\frac{2p^2+2q^2-3}{4}$$

$$\frac{p+q-2p}{2p(p+q)}X=\frac{4p^3+4p^2q-7p+q-4p^3-4pq^2+6p}{8p}$$

$$\frac{-(p-q)}{2p(p+q)}X=\frac{4pq(p-q)-(p-q)}{8p}$$

$$\frac{-(p-q)}{2p(p+q)}X=\frac{(p-q)(4pq-1)}{8p}$$

$$\frac{-1}{p+q}X=\frac{4pq-1}{4}\quad(\because\quad p\fallingdotseq q)$$

$$\therefore\quad X=\frac{(1-4pq)(p+q)}{4}$$

このとき，

$$Y=-\frac{1}{p+q}\cdot\frac{(1-4pq)(p+q)}{4}+\frac{2p^2+2q^2-3}{4}=\frac{(p+q)^2-2}{2}$$

であるから，

$$\boldsymbol{X=\frac{(1-4pq)(p+q)}{4}\ ,\quad Y=\frac{(p+q)^2-2}{2}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

(2)　$p-q=1$ のとき，$p=1+q$ であるから，(1) より，

$$X=\frac{\{1-4q(1+q)\}(1+2q)}{4}\ ,\quad Y=\frac{(1+2q)^2-2}{2}$$

よって，$(1+2q)^2=2(Y+1)$ より，$2q=\sqrt{2(Y+1)}-1$ を得るので，

$$\begin{aligned}X^2&=\frac{\{1-2q(2+2q)\}^2(1+2q)^2}{16}\\&=\frac{\left(1-\{\sqrt{2(Y+1)}-1\}\{\sqrt{2(Y+1)}+1\}\right)^2\cdot 2(Y+1)}{16}\\&=\frac{\left(1-\{2(Y+1)-1\}\right)^2(Y+1)}{8}\\&=\frac{4Y^2(Y+1)}{8}\\&=\boldsymbol{\frac{Y^2(Y+1)}{2}}\cdots\cdots(\textbf{答})\end{aligned}$$

◇ ♡

解説

外心は，各辺の垂直二等分線の交点です．それ以外にも 3 点 P, Q, R から等距離にある点という考え方もありますが，前者の方が計算が楽でしょう．それさえ分かれば，方針は比較的見つけ易いので，あとは計算力が必要になる問題です．正確な計算ができるようにしましょう．