19 （'09　奈良女子大） 【難易度】 … 標準

100 枚のカードに，1 から 100 までの番号がつけられている．これらのカードをすべて袋に入れる．この袋からカードを 1 枚取り出し，そのカードの番号を X とする．取り出したカードを袋に戻し，再び袋からカードを 1 枚取り出し，そのカードの番号を Y とする．このとき次の問いに答えよ．

(1)　$X+Y$ が偶数となる確率を求めよ．

(2)　$X+Y \leqq 5$ となる確率を求めよ．

(3)　$X+Y \leqq n$ となる確率が $\dfrac{1}{4}$ であるような自然数 n は存在しないことを示せ．

【テーマ】：確率の基本性質

方針

(1), (2) は具体的に考えてもできますが，(3) は格子点の問題として処理をします．

解答

(1)　$X+Y$ が偶数となるのは，

(i)　X, Y がともに偶数

(ii)　X, Y がともに奇数

のいずれかであるから，求める確率は，

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\boldsymbol{\frac{1}{2}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

(2)　$X=k\,(k=1,\,2,\,3,\,4)$ のとき，$X+Y \leqq 5$ となる Y は，

$$1 \leqq Y \leqq 5-k$$

であるから，$5-k$ 通りある．よって，$X+Y \leqq 5$ を満たす X, Y の組は，

$$\sum_{k=1}^{4}(5-k)=4+3+2+1=10\ (\text{個})$$

ある．したがって，求める確率は，

$$\frac{10}{100^2}=\boldsymbol{\frac{1}{1000}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

(3)　**【証明】**

$X+Y \leqq n$ となる自然数 X, Y の総数は，

$$1 \leqq X \leqq 100 \text{ かつ } 1 \leqq Y \leqq 100 \text{ かつ } X+Y \leqq n$$

が表す領域の格子点の個数に等しく，その個数を $f(n)$ とすると，$X+Y \leqq n$ となる確率 P_n は，

$$P_n=\frac{f(n)}{100^2}$$

である．

(i)　$n=1$ のとき，

$$P_1=\frac{f(1)}{100^2}=0 \neq \frac{1}{4}$$

である．

(ii) $2 \leqq n \leqq 101$ のとき，$X=k$ における格子点の個数が $n-k$ より，

$$f(n)=\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)=n(n-1)-\frac{1}{2}n(n-1)=\frac{1}{2}n(n-1)$$

であるから，

$$P_n=\frac{n(n-1)}{20000}$$

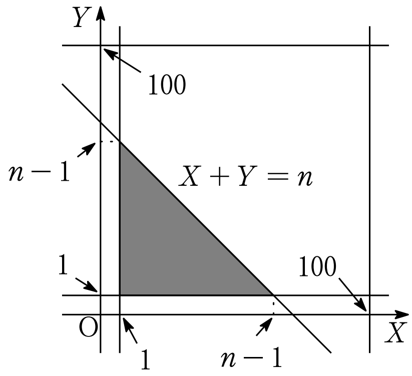
であり，$P_n=\frac{1}{4}$ のとき，

$$n(n-1)=5000 \cdots\cdots ①$$

である．ここで，

$$71\cdot 70=4970<5000$$
$$72\cdot 71=5112>5000$$

であるから，① を満たす自然数 n は存在しない．



(iii) $n \geqq 102$ のとき，

$$f(n)>f(101)=\frac{1}{2}\cdot 100\cdot 101>\frac{100^2}{2}$$

であるから，

$$P_n=\frac{f(n)}{100^2}>\frac{\frac{100^2}{2}}{100^2}=\frac{1}{2}>\frac{1}{4}$$

であり，$P_n=\frac{1}{4}$ となる自然数 n は存在しない．

以上より，$X+Y \leqq n$ となる確率が $\frac{1}{4}$ となるような自然数 n は存在しないことが示された． **(証明終)**

◇ ♡

解説

(1), (2) は具体的に書き出しても解答できますが, (3) は自然数 n を相手にするので, 具体的に書き出すわけにはいきません．そこで格子点を考えて, 処理をすると方針が立ちます．場合分けを行っているのは, 領域が $2 \leqq n \leqq 101$ のときと $n \geqq 102$ のときで変化するからです．$n=1$ は確率が 0 となるので，別で考えた方がよいでしょう．