18 （'04　富山医科薬科大） **【難易度】** … 標準

$a>1$ を定数とする．$x>0$ で定義された連続関数 $f(x)$ が，すべての $x>0$ に対して $\displaystyle\int_x^{ax} f(t)\,dt=k$ を満たすとする．ただし，k は定数である．

（1）　$f(ax)=\dfrac{1}{a}f(x)$ であることを証明せよ．

（2）　$g(x)=xf(x)$ とするとき，$g(ax)$ を $g(x)$ を用いて表せ．

（3）　$n=1,\ 2,\ \cdots$ に対して，$g\left(\dfrac{1}{a^n}x\right)$ を $g(x)$ を用いて表せ．

（4）　さらに $f(x)$ が $\displaystyle\lim_{x\to+0} xf(x)=1$ を満たすとする．

（a）　$g(x)$ を求めよ．

（b）　$f(x)$ を求めよ．

（c）　定数 k を a を用いて表せ．

【テーマ】：積分方程式

方針

（1）は，微分積分学の基本定理を用いて示すことができます．（2）以降は，前問の結果をうまく利用しましょう．

♣ ♠

解答

（1）**【証明】**

$\displaystyle\int_x^{ax} f(t)\,dt=k$ の両辺を x で微分すると，

$$f(ax)\cdot a-f(x)=0 \iff f(ax)=\frac{1}{a}f(x)$$

ゆえに，示された． **（証明終）**

（2）**【証明】**

$g(ax)=axf(ax)=xf(x)=g(x)$　（∵ (1)）

ゆえに，示された． **（証明終）**

（3）（1）で x に $\dfrac{1}{a}x$ を代入すると，

$$f(x)=\frac{1}{a}f\left(\frac{1}{a}x\right) \iff f\left(\frac{1}{a}x\right)=af(x)$$

よって，

$$g\left(\frac{1}{a^n}x\right)=\frac{1}{a^n}xf\left(\frac{1}{a^n}x\right)=\frac{1}{a^n}xa^nf(x)=g(x)$$

ゆえに，$\boldsymbol{g\left(\frac{1}{a^n}x\right)=g(x)}$……**（答）**

（4）

（a）　題意より，$\displaystyle\lim_{x\to+0} g(x)=1$ …… ①

が成り立ち，$a>1$ より x によらず

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a^n}x=0$$

である．よって，(3) の結果と ① から

$$g(x)=\lim_{x\to+0}g(x)=\mathbf{1}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

(b) (a) と (2) より，$xf(x)=1$ であり，$x>0$ より，

$$f(x)=\boldsymbol{\frac{1}{x}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

(c) 与えられた等式と，(b) より，

$$\begin{aligned}k&=\int_x^{ax}\frac{1}{t}\,dt\\&=\Big[\log|t|\Big]_x^{ax}\\&=\log(ax)-\log x\\&=\boldsymbol{\log a}\cdots\cdots(\textbf{答})\end{aligned}$$

◇ ♡

解説

関数方程式と似た部分があります．(1) は，次の微分積分学の基本定理を用いて示せば容易に解答できます．(2) 以降は，前問の結果を利用するので問題の流れをしっかりとつかみましょう．

公 式 **【微分積分学の基本定理】**

a を定数．x は t に無関係な変数．$f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ は連続で微分可能な関数とする．

(i) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt=f(x)$

(ii) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt=f(g(x))g'(x)-f(h(x))h'(x)$