17 （'04　東京工業大） 【難易度】… 標準

3 枚のコイン P, Q, R がある．P, Q, R の表の出る確率をそれぞれ p, q, r とする．このとき次の操作を n 回繰り返す．まず，P を投げて表が出れば Q を，裏が出れば R を選ぶ．次にその選んだコインを投げて，表が出れば赤玉を，裏が出れば白玉をつぼの中に入れる．

（1） n 回ともコイン Q を選び，つぼの中には k 個の赤玉が入っている確率を求めよ．

（2） つぼの中が赤玉だけとなる確率を求めよ．

（3） $n = 2004,\ p = \frac{1}{2},\ q = \frac{1}{2},\ r = \frac{1}{5}$ のとき，つぼの中に何個の赤玉が入っていることが最も起こりやすいかを求めよ．

【テーマ】：確率の最大値

方針

前半は反復試行の確率で，後半が確率の最大値を求める問題です．$\dfrac{P_{k+1}}{P_k}$ と 1 の大小関係を調べます．

解答

（1） P を投げて n 回とも表が出る確率は p^n であり，次に Q を n 回投げたとき表が k 回出る確率は，

$$ {}_n\mathrm{C}_k q^k (1-q)^{n-k} $$

である．ゆえに，求める確率は，

$$ \boldsymbol{p^n \cdot {}_n\mathrm{C}_k q^k (1-q)^{n-k}} \cdots\cdots(\textbf{答}) $$

（2） 1 回の試行で赤玉をつぼに入れるのは，

（i） P を投げて表が出て，Q を投げて表が出る

（ii） P を投げて裏が出て，R を投げて表が出る

のいずれかより，その確率を a とすると，

$$ a = pq + (1-p)r $$

であるから，求める確率は，

$$ a^n = \boldsymbol{\{pq + (1-p)r\}^n} \cdots\cdots(\textbf{答}) $$

（3） （2）より

$$ a = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5} = \frac{7}{20} $$

よって，つぼの中に赤玉が k 個入っている確率 P_k は，

$$ \begin{aligned} P_k &= {}_n\mathrm{C}_k a^k (1-a)^{n-k} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} a^k (1-a)^{n-k} \end{aligned} $$

ゆえに，P_k が最大となるときを考えればよい．

$$ \frac{P_{k+1}}{P_k} = \frac{n!a^{k+1}(1-a)^{n-k-1}}{(k+1)!(n-k-1)!} \cdot \frac{k!(n-k)!}{n!a^k(1-a)^{n-k}} $$

$$= \frac{a(n-k)}{(k+1)(1-a)}$$
$$= \frac{\frac{7}{20}(2004-k)}{(k+1)\cdot\frac{13}{20}}$$
$$= \frac{7(2004-k)}{13(k+1)}$$

であるから，$\dfrac{P_{k+1}}{P_k} > 1$ となるときを考えると，

$$\begin{aligned}\frac{P_{k+1}}{P_k} > 1 &\iff \frac{7(2004-k)}{13(k+1)} > 1\\ &\iff 7(2004-k) > 13(k+1)\\ &\iff 20k < 14015\\ &\iff k < \frac{14015}{20} = 700.75\end{aligned}$$

よって，

$0 \leqq k \leqq 700$ のとき，　$P_k < P_{k+1}$

$701 \leqq k$ のとき，　$P_k > P_{k+1}$

であるから，

$$P_0 < P_1 < \cdots\cdots < P_{700} < P_{701} > P_{702} > \cdots\cdots$$

となり，$k = 701$ のとき P_k は最大となる．ゆえに，

つぼの中に 701 個の赤玉が入っていることが最も起こりやすい……（答）

◇ ♡

解説

確率の最大値・最小値は，頻出の問題です．誘導してくれている場合もありますが，誘導なしでも自分で求められるようになっていなければいけません．なお，最小値の場合は，

$$P_0 > P_2 > \cdots\cdots P_{l-1} > P_l < P_{l+1} < \cdots\cdots$$

となり，$k = l$ のとき，P_k は最小になります．

P_k が階乗を含む式になるので，このままでは P_k の最大値が求められません．そこで，次のように考えて最大となる k を決定します．

$$P_{k+1} < P_k \iff \frac{P_{k+1}}{P_k} < 1 \quad \cdots\cdots①$$

$$P_{k+1} = P_k \iff \frac{P_{k+1}}{P_k} = 1 \quad \cdots\cdots②$$

$$P_{k+1} > P_k \iff \frac{P_{k+1}}{P_k} > 1 \quad \cdots\cdots③$$

このように，$\dfrac{P_{k+1}}{P_k}$ と 1 の大小関係を調べることで，P_{k+1} と P_k の大小関係がわかるのです．しかも $\dfrac{P_{k+1}}{P_k}$ のように分数計算にすることで，階乗が消えるというメリットもあります．あとは，①, ②, ③ をみたす自然数 k の値を求めて，それに基づいて

$$P_0 < P_2 < \cdots\cdots P_{l-1} < P_l > P_{l+1} > \cdots\cdots$$

となるような l を求めれば，$k = l$ のとき，P_k は最大になるというわけです．

注 ： $P_0 < P_2 < \cdots\cdots P_{l-1} < P_l = P_{l+1} > P_{l+2} > \cdots\cdots$ のように最大となる k が 2 つ存在することもあります．