16 （'12　奈良県立医科大）　**【難易度】** … **標準**

n を 3 以上の整数とし，n 個の整数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ は以下の 3 条件を満たすとする．

条件 (1) ： $a_1 \geqq 2$

条件 (2) ： $a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots \geqq a_n$

条件 (3) ： $1 \leqq i < j \leqq n$ を満たす任意の整数 i, j に対して，不等式

$$a_i + a_j > 0$$

が成り立つ．

このとき，不等式

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \geqq n$$

が成り立つことを証明せよ．また，この不等式において等号が成り立つ場合の n の値，および n 個の整数の組 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ をすべて求めよ．

【テーマ】：不等式の証明

方針

条件 (2), (3) から $a_{n-1} > 0$ が導かれます．等号が成り立つのは，n 個の数字の和が n のときなので，n 個の数字のほとんどが 1 であるという予想が立ちます．

♣ ♠

解答

【証明】

条件 (2), (3) より，

$$a_{n-1} \geqq a_n\ ,\quad a_{n-1} + a_n > 0 \cdots\cdots ①$$

であるから，

$$-a_{n-1} < a_n \leqq a_{n-1}$$

したがって，$-a_{n-1} < a_{n-1}$ より $a_{n-1} > 0$ を得る．a_{n-1} は整数であるから，この式は $a_{n-1} \geqq 1$ と同値である．
また，条件 (1), (2) より，

$$a_1 \geqq 2,\quad a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots\cdots \geqq a_{n-1} \geqq 1$$

① より $a_{n-1} + a_n \geqq 1$ が成り立つ．

(i) $n = 3$ のとき，

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + (a_2 + a_3) \geqq 2 + 1 = 3$$

ここで，等号は $a_1 = 2,\ a_2 + a_3 = 1$ のとき，すなわち

$$(a_1, a_2, a_3) = (2, 1, 0), (2, 2, -1)$$

のとき成立する．

(ii) $n \geqq 4$ のとき,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots\cdots + (a_{n-1} + a_n) \geqq 2 + \underbrace{1 + 1 + \cdots\cdots + 1}_{n-3\text{ 個}} + 1 = n$$

ここで，等号は $a_1 = 2,\ a_2 = a_3 = \cdots\cdots = a_{n-2} = 1,\ a_{n-1} + a_n = 1$ のとき，すなわち

$$(a_1,\ a_2,\ \cdots\cdots,\ a_{n-1},\ a_n) = (2,\ 1,\ \cdots\cdots,\ 1,\ 0)$$

のとき成立する．

以上より，$\sum_{i=1}^{n} a_i \geqq n$ が示された． **（証明終了）**

また，等号成立条件は，

$$\begin{cases} \boldsymbol{n = 3\ \text{のとき，}\ (a_1,\ a_2,\ a_3) = (2,\ 1,\ 0),\ (2,\ 2,\ -1)} \\ \boldsymbol{n \geqq 4\ \text{のとき，}\ (a_1,\ a_2,\ \cdots\cdots,\ a_{n-1},\ a_n) = (2,\ 1,\ \cdots\cdots,\ 1,\ 0)} \end{cases} \cdots\cdots(\textbf{答})$$

である．

◇ ♡

解説

最初のきっかけをつかむのが難しい問題ですが，このような場合は n を具体的に決めて少し実験をしてみます．例えば，$n = 3,\ 4,\ 5$ としてみて，条件を満たす整数を考えてみます．そこから解答のヒントを得ましょう．入試問題の中には，この実験を小問として問い，ヒントを与えてくれる場合もありますが，本問のように自分で行わなければならない問題もあります．何をやってよいか分からない問題に直面したときには，実験をする癖をつけておきましょう．