15 （'12　埼玉大） 【難易度】 … 標準

t は $t \geqq 0,\ t \fallingdotseq 1$ を満たす実数とし，行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} t^2+t+1 & -t(t+1) \\ t+1 & -t \end{pmatrix}$$

で定める．以下の問いに答えよ．

(1) 行列 $P = \begin{pmatrix} p & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ と $B = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ が等式 $AP = PB$ を満たすとする．ただし $p \fallingdotseq 1$ とする．このとき $p,\ b$ を t を用いて表せ．

(2) 自然数 n に対して，A^n の $(2,\ 2)$ 成分を $f(t)$ とおく．$f(t)$ を求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{t \to 1} f(t)$ を求めよ．

【テーマ】：行列の累乗

方針

(1) は両辺の成分を比較します．(2) では，対角化行列の n 乗計算を利用するため $A = PBP^{-1}$ の形を作って n 乗します．(3) では，$t-1=x$ とおいて二項定理を利用しましょう．

♣ ♠

解答

(1)
$$AP = \begin{pmatrix} t^2+t+1 & -t(t+1) \\ t+1 & -t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (p-1)t^2+(p-1)t+p & -1 \\ (p-1)t+p & -1 \end{pmatrix}$$

$$PB = \begin{pmatrix} p & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pb & -1 \\ b & -1 \end{pmatrix}$$

$AP = PB$ より，

$$\begin{cases} (p-1)t^2+(p-1)t+p = pb & \cdots\cdots \text{①} \\ (p-1)t+p = b & \cdots\cdots \text{②} \end{cases}$$

①, ② より，

$$(p-1)t^2+b = pb \iff (p-1)t^2 = (p-1)b$$

$p \fallingdotseq 1$ であるから，$\boldsymbol{b = t^2}$……(**答**)

また，② より

$$(p-1)t+p = t^2 \iff (t+1)p = t(t+1)$$

$t \geqq 0$ であるから，$t+1 \fallingdotseq 0$ である．したがって，

$\boldsymbol{p = t}$……(**答**)

(2) $\Delta(P) = -p+1 \fallingdotseq 0$ より P^{-1} が存在して，

$$P^{-1} = \frac{1}{1-p}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & p \end{pmatrix}$$

$AP=PB$ の両辺に右から P^{-1} をかけると，$A=PBP^{-1}$ となるので，

$$A^n=(PBP^{-1})^n=PB^nP^{-1}$$
$$=\frac{1}{1-p}\begin{pmatrix} p & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & p \end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{1-p}\begin{pmatrix} b^np & -1 \\ b^n & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & p \end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{1-p}\begin{pmatrix} -b^np+1 & b^np-p \\ -b^n+1 & b^n-p \end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{1-t}\begin{pmatrix} -t^{2n+1}+1 & t^{2n+1}-t \\ -t^{2n}+1 & t^{2n}-t \end{pmatrix}$$

$f(t)$ は $(2,2)$ 成分であるから，

$$\boldsymbol{f(t)=\frac{t^{2n}-t}{1-t}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

(3)　$x=t-1$ とおくと，$t\to1$ のとき，$x\to0$ である．

$$t^{2n}-t=(x+1)^{2n}-(x+1)$$
$$=\sum_{r=0}^{2n}{}_{2n}\mathrm{C}_rx^r-(x+1)$$
$$=\sum_{r=2}^{2n}{}_{2n}\mathrm{C}_rx^r+2nx+1-(x+1)$$
$$=\sum_{r=2}^{2n}{}_{2n}\mathrm{C}_rx^r+(2n-1)x$$

よって，求める極限値は，

$$\lim_{t\to1}f(t)=\lim_{x\to0}\frac{\sum_{r=2}^{2n}{}_{2n}\mathrm{C}_rx^r+(2n-1)x}{-x}$$
$$=\lim_{x\to0}\left(-\sum_{r=2}^{2n}{}_{2n}\mathrm{C}_rx^{r-1}-(2n-1)\right)$$
$$=\boldsymbol{-2n+1}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

◇ ♡

解説

行列の n 乗は様々な方法で計算することができます．本問では対角化行列の n 乗

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & d^n \end{pmatrix}$$

を利用して A^n を計算させています．受験生なら必ず知っておかなければならない方法の 1 つです．極限計算では，$f(t)$ の分母が $1-t$ になっているので，$x=t-1$ などとおいて二項定理を利用すると約分ができてすっきりと計算できます．このように極限計算では，$t\to0$ や $t\to\infty$ の形を作ると見通しが立ちやすくなることが多いので，置き換えを利用して計算する方法を身につけておきましょう．