14 （'05　大阪大） **【難易度】** … 標準

正の整数 n に対して

$$S(n)=\sum_{p=1}^{2n}\frac{(-1)^{p-1}}{p},\quad T(n)=\sum_{q=1}^{n}\frac{1}{n+q}$$

とおく．等式 $S(n)=T(n)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ が成り立つことを，数学的帰納法を用いて示せ．

【テーマ】：数学的帰納法

方針

$n=k+1$ のときの和の計算方法を工夫する必要があります．

♣ ♠

解答 **【証明】**

（i） $n=1$ のとき，

$$S(1)=\sum_{p=1}^{2}\frac{(-1)^{p-1}}{p}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$T(1)=\sum_{q=1}^{1}\frac{1}{1+q}=\frac{1}{2}$$

よって，$n=1$ のとき成り立つ．

（ii） $n=k$ のとき，$S(k)=T(k)$ が成り立つと仮定する．

$$\begin{aligned}
S(k+1)&=\sum_{p=1}^{2(k+1)}\frac{(-1)^{p-1}}{p}\\
&=\sum_{p=1}^{2k}\frac{(-1)^{p-1}}{p}+\frac{(-1)^{2k}}{2k+1}+\frac{(-1)^{2k+1}}{2k+2}\\
&=\sum_{q=1}^{k}\frac{1}{k+q}+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}\quad(\because\ \ S(k)=T(k))\\
&=\sum_{q=0}^{k-1}\frac{1}{k+1+q}+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}\\
&=\left(\sum_{q=1}^{k+1}\frac{1}{k+1+q}+\frac{1}{k+1}-\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}\right)+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}\\
&=\sum_{q=1}^{k+1}\frac{1}{k+1+q}=T(k+1)
\end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときも成り立つ．

以上より，すべての自然数 n に対して $S(k)=T(k)$ が成り立つことが示された． **（証明終）**

◇ ♡

解説

$n=k+1$ のときを示す際は，和の計算をうまく行う必要があります．解答では，

$$\sum_{q=1}^{k}\frac{1}{k+q}\ \text{から}\ \sum_{q=1}^{k+1}\frac{1}{k+1+q}$$

の形を作っています．これは，一度和を書き下して一般項の形を取り直します．慣れればそれほど難しくないですが，慣れないうちは変形に苦労するかもしれません．