13 （′07　京都府立医科大） 【難易度】…やや難

n を自然数とし，関数 $f_n(x)=\sin^{n+1}x$ の $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ における変曲点の x 座標を x_n とする．

（1） 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}f_n(x_n)$ を求めよ．ただし，必要ならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$ であることは用いてよい．

（2） 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\frac{\pi}{2}-x_n\right)$ を求めよ．

（3） 点 $(x_n,\ f_n(x_n))$ における曲線 $y=f_n(x)$ の接線と x 軸との交点を P_n とし，直線 $x=\dfrac{\pi}{2}$ との交点を Q_n とする．3 点 P_n, Q_n および $\mathrm{R}\left(\dfrac{\pi}{2},\ 0\right)$ を頂点とする三角形の面積を S_n とするとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}S_n$ を求めよ．

【テーマ】：関数の極限

方針

変曲点の x 座標は $f''(x)=0$ を満たす x の値を考えます．(2) では $\theta_n=\dfrac{\pi}{2}-x_n$ とおいて θ_n の極限を考えます．(3) では，うまく式を変形して (1), (2) の結果を利用しましょう．

♣ ♠

解答

（1） $f_n'(x)=(n+1)\sin^n x\cos x$ であるから，

$$\begin{aligned}f_n''(x)&=(n+1)\left\{n\sin^{n-1}x\cos^2 x+\sin^n x(-\sin x)\right\}\\&=(n+1)\left\{n\sin^{n-1}x(1-\sin^2 x)-\sin^{n+1}x\right\}\\&=(n+1)\sin^{n-1}x\left\{n-(n+1)\sin^2 x\right\}\end{aligned}$$

よって，$f_n''(x)=0$ のとき，$\sin x=\sqrt{\dfrac{n}{n+1}}$ ($\because\ \ \sin x>0$) であり，この値の前後で $f_n''(x)$ の符号が変化するので，x がこの値を満たすとき変曲点となる．したがって，

$$\sin x_n=\sqrt{\frac{n}{n+1}}$$

である．ゆえに，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}f_n(x_n)&=\lim_{n\to\infty}\sin^{n+1}x_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{2}}\\&=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{2}}=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{-(n+1)}\right)^{-(n+1)}\right\}^{-\frac{1}{2}}=\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{e}}}\cdots\cdots(\textbf{答})\end{aligned}$$

（2） $\dfrac{\pi}{2}-x_n=\theta_n$ とおくと，

$$\sin\theta_n=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x_n\right)=\cos x_n=\sqrt{1-\frac{n}{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sin\theta_n=0$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\theta_n=0$ を得る．

$$\begin{aligned}\therefore\ \ \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\frac{\pi}{2}-x_n\right)&=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\theta_n=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\sin\theta_n\cdot\frac{\theta_n}{\sin\theta_n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\cdot\frac{\theta_n}{\sin\theta_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}\cdot\frac{\theta_n}{\sin\theta_n}=\boldsymbol{1}\cdots\cdots(\textbf{答})\end{aligned}$$

(3) 点 $(x_n,\, f_n(x_n))$ における接線の方程式は,

$$y = f_n'(x_n)(x - x_n) + f_n(x_n)$$

であり, $\mathrm{P}_n(p_n,\, 0)$ とおくと,

$$0 = f_n'(x_n)(p_n - x_n) + f_n(x_n) \iff p_n = x_n - \frac{f_n(x_n)}{f_n'(x_n)}$$

である. また, $\mathrm{Q}_n\left(\dfrac{\pi}{2},\, q_n\right)$ とおくと,

$$q_n = f_n'(x_n)\left(\frac{\pi}{2} - x_n\right) + f_n(x_n)$$

よって,

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - p_n\right)q_n \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - p_n\right)\left\{f_n'(x_n)\left(\frac{\pi}{2} - x_n\right) + f_n(x_n)\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - x_n + \frac{f_n(x_n)}{f_n'(x_n)}\right)\left\{f_n'(x_n)\left(\frac{\pi}{2} - x_n\right) + f_n(x_n)\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - x_n + \frac{f_n(x_n)}{f_n'(x_n)}\right)^2 f_n'(x_n) \end{aligned}$$

ここで,

$$\frac{f_n(x_n)}{f_n'(x_n)} = \frac{\sin^{n+1} x_n}{(n+1)\sin^n x_n \cos x_n} = \frac{\sin x_n}{(n+1)\cos x_n} = \frac{\sqrt{\dfrac{n}{n+1}}}{(n+1)\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}} = \frac{\sqrt{n}}{n+1}$$

$$f_n'(x_n) = (n+1)\sin^n x_n \cos x_n = (n+1)\sin^{n+1} x_n \cdot \frac{\cos x_n}{\sin x_n} = \frac{n+1}{\sqrt{n}} f_n(x_n)$$

$$\therefore\quad S_n = \frac{1}{2}\left(\theta_n + \frac{\sqrt{n}}{n+1}\right)^2 \frac{n+1}{\sqrt{n}} f_n(x_n)$$

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} S_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{2}\left(\theta_n + \frac{\sqrt{n}}{n+1}\right)^2 \frac{n+1}{\sqrt{n}} f_n(x_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(\sqrt{n}\theta_n + \frac{n}{n+1}\right)^2 \frac{n+1}{n} f_n(x_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(\sqrt{n}\theta_n + \frac{1}{1 + \dfrac{1}{n}}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right) f_n(x_n) \end{aligned}$$

ここで, (1), (2) の結果より,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} S_n = \frac{1}{2}(1+1)^2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{e}} = \boldsymbol{\frac{2}{\sqrt{e}}} \cdots\cdots\text{(答)}$$

◇ ♡

解説

(1) は, 変曲点の x 座標を求めますが, $f''(x) = 0$ となる x で変曲点をもつとは限りません. その x の値の前後で $f''(x)$ の符号が変化するとき変曲点と呼びます. したがって, その確認をするか増減表をかいておくべきでしょう.

(2) は, $\dfrac{\pi}{2} - x_n = \theta_n$ とおくことがポイントです. θ_n の極限が求められるので, $\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\theta}{\sin\theta} = 1$ を用います.

(3) は, 式変形が大変な問題です. (1), (2) の結果を利用するためにはどのように式を変形するかを考えます. 入試問題は, 前問の結果を利用して解答するという流れが多いので, つまずいたら前問の結果が使えるかどうかを考えましょう.