12 ('86 弘前大) 【難易度】… 標準

次の条件 (i), (ii), (iii) を満たす 3 次関数 $y=f(x)$ を求めよ.

(i) $f(0)=1$

(ii) $f'(0)=f'(1)=-3$

(iii) 極大値と極小値が存在して，それらの差が極値をとる x の値の差の絶対値に等しい.

【テーマ】: 3 次関数の極値の差

方針

まずは，条件 (ii) を用いて $f'(x)$ の形を決めます．次に，条件 (i) で $f(x)$ の形を決定し，最後に条件 (iii) で係数を決定します.

♣ ♠

解答

条件 (ii) より，

$$f'(0)+3=f'(1)+3=0$$

であるから，$f'(x)+3=0$ は $x=0,\,1$ を解に持つ．一方，$f(x)$ は 3 次式であるから，$f'(x)$ は 2 次式である．したがって，実数 a を用いて，

$$f'(x)+3=ax(x-1) \quad (a \neq 0)$$

と表せる．よって，

$$f'(x)=ax^2-ax-3 \cdots\cdots ①$$

$$f(x)=\frac{1}{3}ax^3-\frac{1}{2}ax^2-3x+C \quad (C\text{ は積分定数})$$

$f(0)=C$ であるから，条件 (i) より，$C=1$ である．ゆえに，

$$f(x)=\frac{1}{3}ax^3-\frac{1}{2}ax^2-3x+1$$

また，条件 (iii) より，極値が存在するので，① から，$ax^2-ax-3=0$ の判別式を D とすると，

$$D=a^2+12a>0 \iff a<-12,\ 0<a \cdots\cdots ②$$

$f'(x)=0$ の 2 解を $\alpha,\beta\ (\alpha<\beta)$ とすると，$x=\alpha,\beta$ で極値をもつので，条件 (iii) から，

$$|f(\alpha)-f(\beta)|=|\alpha-\beta|$$

ここで，左辺を計算すると，

$$\begin{aligned}|f(\alpha)-f(\beta)| &= \left|\Big[\,f(x)\,\Big]_{\beta}^{\alpha}\right| \\ &= \left|\int_{\beta}^{\alpha} f'(x)\,dx\right| \\ &= \left|a\int_{\beta}^{\alpha}(x-\alpha)(x-\beta)\,dx\right| \quad ☞ \boxed{\text{解説}} \\ &= \left|\frac{a}{6}(\alpha-\beta)^3\right|\end{aligned}$$

となり，$\beta-\alpha>0$ より，

$$\frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3=\beta-\alpha \iff |a|(\beta-\alpha)^2=6$$

α,β は $f'(x)=0$ の 2 解であるから，解と係数の関係より，

$$\alpha+\beta=1,\quad \alpha\beta=-\frac{3}{a}$$

が成り立つ．したがって，

$$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=1+\frac{12}{a}$$

よって，

$$|a|\left(1+\frac{12}{a}\right)=6$$

(ア) $a>0$ のとき，

$a\left(1+\dfrac{12}{a}\right)=6 \iff a=-6$ であり，これは不適．

(イ) $a<0$ のとき，

$-a\left(1+\dfrac{12}{a}\right)=6 \iff a=-18$ であり，これは ② も満たす．

以上より，求める 3 次関数 $y=f(x)$ は，

$$\boldsymbol{f(x)=-6x^3+9x^2-3x+1}\cdots\cdots\textbf{(答)}$$

◇ ♡

解説

まずは，条件 (ii) から $f'(x)$ の形を決定しますが，ここでは因数定理を利用します．$f'(0)+3=f'(1)+3=0$ のように，ある部分の数字だけが違う場合，その部分を x に変えた式 $f'(x)+3=0$ を考えれば，$g(x)=f'(x)+3$ とでもおけば，$g(0)=g(1)=0$ となるので，因数定理より $g(x)$ は $x(x-1)$ を因数に持つことがわかります．しかし，これだけでは $g(x)$ の形は確定できません．$f'(x)$ が 2 次式であることから $g(x)=ax(x-1)$ とすることができるのです．したがって，その議論が欠落している場合は，減点対象となります．また，条件 (iii) をどのように使うかですが，3 次関数の極値の差は，解答のように定積分を用いて計算することができます．解答中の式変形ですが，$f'(x)=0$ の 2 解を α,β としているので，$f'(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)$ と変形できます．この式変形が最大のポイントです．なお，2 次の係数を忘れないように付けておきましょう．まともに計算するのは大変なので，このような計算手法は知っておくとよいでしょう．

公式

【定積分の公式】

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0)$ の 2 解を $\alpha,\beta\ (\alpha<\beta)$ とするとき，次式が成り立つ．

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta (ax^2+bx+c)\,dx &= \int_\alpha^\beta a(x-\alpha)(x-\beta)\,dx\\ &= -\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3\end{aligned}$$

教科書や参考書などでは，a がない形で書かれていると思いますが，実際の計算では 2 次の係数をかけるのを忘れる人が多いので，2 次の係数 a をつけた状態で覚えておくとよいでしょう．これは，面積計算をする際によく用いられます．