7 （′61　東京医科歯科大） 【難易度】 … 標準

長さ 1 の線分 AB の端点 B において，AB に垂直にひいた直線上に任意の点 C をとり，線分 AC 上に CB = CP である点 P をとり，P から AB におろした垂線の足を Q とする．

（1）　$\angle \mathrm{ACB} = \theta$ として，PQ の長さを θ で表せ．

（2）　PQ の長さが最大となるときの $\cos\theta$ の値を求めよ．

【テーマ】：微分法の応用

方針

(1) は三角比を利用して辺の長さを求めます．(2) は微分して増減表を書きますが，$f'(\theta) = 0$ を満たす θ は求めることができないので，文字で代用します．

♣ ♠

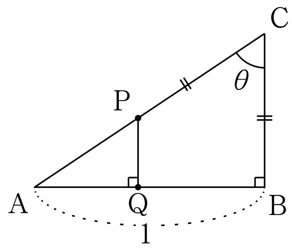
解答

(1)　$\mathrm{BC} = \mathrm{PC} = \dfrac{\mathrm{AB}}{\tan\theta} = \dfrac{1}{\tan\theta}$ であり，$\mathrm{AC} = \dfrac{1}{\sin\theta}$ より，

$$\mathrm{AP} = \frac{1}{\sin\theta} - \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$$

$\triangle\mathrm{APQ} \backsim \triangle\mathrm{ACB}$ より，$\angle\mathrm{APQ} = \theta$ であるから，

$$\mathrm{PQ} = \mathrm{AP}\cos\theta = \boldsymbol{\frac{\cos\theta(1-\cos\theta)}{\sin\theta}} \cdots\cdots(\textbf{答})$$



(2)　$f(\theta) = \dfrac{\cos\theta - \cos^2\theta}{\sin\theta}$ とおくと，

$$\begin{aligned}
f'(\theta) &= \frac{(-\sin\theta + 2\cos\theta\sin\theta)\sin\theta - (\cos\theta - \cos^2\theta)\cos\theta}{\sin^2\theta} \\
&= \frac{-\sin^2\theta + 2\cos\theta\sin^2\theta - \cos^2\theta + \cos^3\theta}{\sin^2\theta} \\
&= \frac{-1 + \cos\theta(2\sin^2\theta + \cos^2\theta)}{\sin^2\theta} \\
&= \frac{-1 + \cos\theta(\sin^2\theta + 1)}{\sin^2\theta} \\
&= \frac{-1 + \cos\theta(2 - \cos^2\theta)}{\sin^2\theta} \\
&= \frac{-\cos^3\theta + 2\cos\theta - 1}{1 - \cos^2\theta} \\
&= \frac{-(\cos\theta - 1)(\cos^2\theta + \cos\theta - 1)}{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)} \\
&= \frac{\cos^2\theta + \cos\theta - 1}{1 + \cos\theta}
\end{aligned}$$

ここで，$f'(\theta) = 0$ のとき，$\cos^2\theta + \cos\theta - 1 = 0$ であるから，

$$\cos\theta = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

であり，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ を満たすので，$0 < \cos\theta < 1$ である．したがって，

$$\cos\theta = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

となる．よって，これを満たす θ の値を α とすると，増減表は次のようになる．

θ	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$f(\theta)$		$\nearrow$		$\searrow$	

ゆえに，$f(\theta)$ は $\theta=\alpha$ のとき，最大値をとるので，求める $\cos\theta$ の値は，

$$\boldsymbol{\cos\theta=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

◇ ♡

$\boxed{\text{解説}}$

(1) は辺の長さを三角比を用いて表すことができるので，基本問題です．(2) では，(1) で求めた PQ を θ の関数とみなせばよいので，$f(\theta)$ とおいて，最大となる場合を増減表を用いて求めます．ただし，最大となる θ の値は求められないので文字で代用しましょう．本問では，最大値を求めることまでは要求していませんが，α が

$$\cos^2\alpha+\cos\alpha-1=0$$

を満たすので，これと $\cos\alpha=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ をうまく用いれば最大値が求められます．