

**2** ('06 大阪大)

【難易度】…標準

自然数  $m, n$  と  $0 < a < 1$  を満たす実数  $a$  を, 等式  $\log_2 6 = m + \frac{1}{n+a}$  が成り立つようにとる. 以下の問いに答えよ.

- (1) 自然数  $m, n$  を求めよ.  
 (2) 不等式  $a > \frac{2}{3}$  が成り立つことを示せ.

【テーマ】: 対数不等式と整数問題

方針

(1) では,  $\log_2 6$  のとり得る範囲から  $m$  が決定します. その後は,  $n+a$  が整数部分と小数部分を表していることに着目をして  $n$  を決定します. (2) では,  $a - \frac{2}{3} > 0$  を示します.

解答

- (1)  $\log_2 4 < \log_2 6 < \log_2 8$  すなわち  $2 < \log_2 6 < 3$  であるから,

$$2 < m + \frac{1}{n+a} < 3$$

$n$  は自然数で  $0 < a < 1$  であるから,  $0 < \frac{1}{n+a} < 1$  である. したがって,  $m = 2$  である. このとき,

$$\begin{aligned} \log_2 6 &= 2 + \frac{1}{n+a} \\ \frac{1}{n+a} &= \log_2 6 - \log_2 4 \\ &= \log_2 \frac{3}{2} \\ n+a &= \frac{1}{\log_2 \frac{3}{2}} \\ &= \log_{\frac{3}{2}} 2 \end{aligned}$$

よって,  $\log_{\frac{3}{2}} 2$  の整数部分が  $n$  で, 小数部分が  $a$  となる. 底は  $\frac{3}{2}$  で 1 より大きいので,

$$\log_{\frac{3}{2}} \frac{3}{2} < \log_{\frac{3}{2}} 2 < \log_{\frac{3}{2}} \frac{9}{4} \iff 1 < \log_{\frac{3}{2}} 2 < 2$$

が成り立つ. したがって,  $n = 1$  を得る. 以上より,  $m = 2, n = 1 \dots \dots$  (答)

- (2) 【証明】

(1) より,  $a + 1 = \log_{\frac{3}{2}} 2$  であるから,

$$\begin{aligned} a - \frac{3}{2} &= \log_{\frac{3}{2}} 2 - \frac{5}{3} \\ &= \frac{1}{3} \left( 3 \log_{\frac{3}{2}} 2 - 5 \right) \\ &= \frac{1}{3} \left\{ \log_{\frac{3}{2}} 8 - \log_{\frac{3}{2}} \left( \frac{3}{2} \right)^5 \right\} \\ &= \frac{1}{3} \log_{\frac{3}{2}} \frac{8 \cdot 2^5}{3^5} \\ &= \frac{1}{3} \log_{\frac{3}{2}} \frac{256}{243} \end{aligned}$$

底は  $\frac{3}{2}$  で 1 より大きいので,  $\log_{\frac{3}{2}} \frac{256}{243} > \log_{\frac{3}{2}} 1 = 0$  である.

ゆえに,  $a > \frac{2}{3}$  が示された.

(証明終)

◇ ————— ♡ —————

【解説】

(1) では,  $0 < \frac{1}{n+a} < 1$  であることから,  $\log_2 6$  の整数部分が  $m$  で, 小数部分が  $\frac{1}{n+a}$  になることに着目します. そのため,  $\log_2 6$  のとり得る値の範囲を求めるのです.  $m$  が決まれば,  $n+a = \log_{\frac{3}{2}} 2$  となり, 今度は  $n$  が整数部分,  $a$  が小数部分となります. このようにして, 自然数  $m, n$  を求めていきます.

(2) は, 不等式の証明の基本です. 大きい方から小さい方を引いて正になることを示します.  $\log_{\frac{3}{2}} \frac{256}{243}$  の符号ですが, 底が 1 より大きくかつ, 真数が 1 より大きいので正となります. 真数だけで符号を判断しないように気をつけましょう.