32 （'90　岡山大） 【難易度】 … 標準

xy 平面上の曲線 C が媒介変数 t を使って

$$x=t^2,\quad y=e^t+at\quad (t\geqq 0)$$

と書かれている．ただし，e は自然対数の底，a は定数である．C が x 軸に接しているとき，次の問いに答えよ．

（1） a の値を求めよ．

（2） 直線 $\ell : y=1-x$ と曲線 C がちょうど 2 点で交わることを示せ．

（3） xy 平面において，直線 ℓ と曲線 C によって囲まれる部分の面積を求めよ．

【テーマ】：面積

方針

C が x 軸と接するので，$y=0$ かつ $\dfrac{dy}{dx}=0$ を満たす t が存在します．

♣ ♠

解答

（1） $\dfrac{dx}{dt}=2t,\ \dfrac{dy}{dt}=e^t+a$ より，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{e^t+a}{2t}$ である．

曲線 C が x 軸と接しているので，

$$\begin{cases} e^t+at=0 & \cdots\cdots ① \\ \dfrac{e^t+a}{2t}=0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

を満たす 0 以上の実数 t が存在する．② より，$a=-e^t$ であるから，① へ代入して，

$$e^t-te^t=0 \iff e^t(1-t)=0$$

$e^t\fallingdotseq 0$ より，$t=1$ を得る．よって，このとき $\boldsymbol{a=-e}$……(**答**)

（2） **【証明】**

C と ℓ の交点の個数は，

$$x=t^2,\quad y=e^t-et$$

を $y=1-x$ へ代入して得られる t についての方程式

$$e^t-et=1-t^2 \iff e^t-et+t^2-1=0$$

を満たす 0 以上の実数 t の個数と一致する．

$f(t)=e^t-et+t^2-1$ とおくと，

$$f'(t)=e^t-e+2t\ ,\quad f''(t)=e^t+2>0$$

よって，$f'(t)$ は単調増加である．

$$f'(0)=1-e<0,\quad f'(1)=2>0$$

であるから，$0\leqq t\leqq 1$ で $f'(t)=0$ となる t がただ 1 つ存在する．その値を $t=\alpha$ とすると，$y=f(t)$ の増減表は次のようになる．

t	0	$\cdots$	α	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$		$+$
$f(t)$	0	↘		↗	0	↗

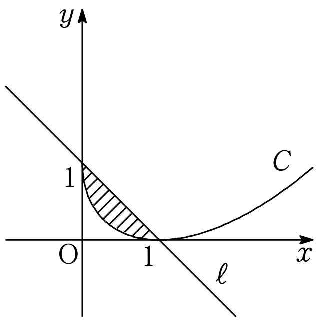
$f(0)=0$，$f(1)=0$ であるから，$f(t)=0$ となる t は，$t=0, 1$ の 2 つ存在する．このとき，C と ℓ の交点は，

$(0, 1)$，$(1, 0)$

であるから，題意は示された． **（証明終）**

(3) 次図のように $0 \leqq x \leqq 1$ で曲線 C より直線 $y=1-x$ の方が上にあるので，求める面積を S とすると，

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2} - \int_0^1 y\,dx \\
&= \frac{1}{2} - \int_0^1 (e^t - et)\cdot 2t\,dt \\
&= \frac{1}{2} - 2\int_0^1 te^t\,dt + 2e\int_0^1 t^2\,dt \\
&= \frac{1}{2} - 2\Big[\,te^t - e^t\,\Big]_0^1 + 2e\Big[\,\frac{1}{3}t^3\,\Big]_0^1 \\
&= \frac{1}{2} - 2(e-e+1) + \frac{2}{3}e \\
&= \boldsymbol{\frac{2}{3}e - \frac{3}{2}}\cdots\cdots\textbf{(答)}
\end{aligned}$$



◇ ♡

解説

(1) では，媒介変数の状態で曲線が x 軸に接することを示すので，$\dfrac{dy}{dx}=0$ かつ $y=0$ を同時に満たす t が存在します．

(2) では，2 点で交わることを示すのですが，$x=t^2$ と与えられているので，t が 2 つ存在すればよいことに気付けば方針が立ちます．

(3) では，曲線の概形を正確にかく必要はありません．2 点で交わっていることは (2) で証明済みなので，その区間での直線と曲線の上下関係が分かれば面積を求める式が立式できます．