31 （'04　富山大） 【難易度】 … 標準

大小 2 個のさいころを同時に 5 回投げ，その n 回目 $(n=1,\ 2,\ \cdots,\ 5)$ に出た目の数をそれぞれ $a_n,\ b_n$ とする．$X_1=a_1b_1,\ X_2=X_1+a_2b_2,\ \cdots,\ X_5=X_4+a_5b_5$ と順に定める．X_n が偶数となる確率を p_n とするとき，$p_2,\ p_3,\ p_4,\ p_5$ を求めよ．

【テーマ】：独立・反復試行の確率

方針

a_nb_n が偶数になる確率と奇数になる確率を求めて考えます．また，漸化式を立式する方法もあります．

♣ ♠

解答

a_nb_n が奇数になるのは，a_n と b_n がともに奇数のときであるから，その確率は，

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

である．よって，a_nb_n が偶数になる確率は，余事象の確率より，

$$1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

である．したがって，$p_1=\dfrac{3}{4}$ となる．

X_2 が偶数となるのは，

（ i ） X_1 が偶数かつ a_2b_2 が偶数

（ii） X_1 が奇数かつ a_2b_2 が奇数

の 2 通りが考えられるので，

$$p_2=p_1\cdot\frac{3}{4}+(1-p_1)\cdot\frac{1}{4}=\frac{9}{16}+\frac{1}{16}=\boldsymbol{\frac{5}{8}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

同様にすると，

$$p_3=p_2\cdot\frac{3}{4}+(1-p_2)\cdot\frac{1}{4}=\frac{15}{32}+\frac{3}{32}=\boldsymbol{\frac{9}{16}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

$$p_4=p_3\cdot\frac{3}{4}+(1-p_3)\cdot\frac{1}{4}=\frac{27}{64}+\frac{7}{64}=\boldsymbol{\frac{17}{32}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

$$p_5=p_4\cdot\frac{3}{4}+(1-p_4)\cdot\frac{1}{4}=\frac{51}{128}+\frac{15}{128}=\boldsymbol{\frac{33}{64}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

別解

次のように，漸化式を立式して解くこともできます．

$$p_1=\frac{3}{4},\quad p_{n+1}=p_n\cdot\frac{3}{4}+(1-p_n)\cdot\frac{1}{4}$$

が成り立つので，

$$p_{n+1}=\frac{1}{2}p_n+\frac{1}{4}\iff p_{n+1}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(p_n-\frac{1}{2}\right)$$

と変形できる．よって，数列 $\left\{p_n-\dfrac{1}{2}\right\}$ は，初項 $p_1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$，公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列であるから，

$$p_n-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\iff p_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+\frac{1}{2}$$

を得る．これを用いて $p_2,\ p_3,\ p_4,\ p_5$ を求めることができる．

◇ ♡

解説

問題の仕組みは単純なので，完答を目指したい問題です．先に述べた解答で答えた人は，漸化式が立式できることに気付いたでしょうか？単純に同じ作業を繰り返すので，漸化式の存在に気付きたいところです．常に問題が一般化することを想定して解くように心がけましょう．