30 （'11 神戸大） 【難易度】 … 標準

$i=\sqrt{-1}$ とする．以下の問に答えよ．

（1） 実数 α, β について，等式

$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta)=\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)$$

が成り立つことを示せ．

（2） 自然数 n に対して，

$$z=\sum_{k=1}^{n}\left(\cos\frac{2\pi k}{n}+i\sin\frac{2\pi k}{n}\right)$$

とおくとき，等式

$$z\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)=z$$

が成り立つことを示せ．

（3） 2 以上の自然数 n について，等式

$$\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2\pi k}{n}=\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{2\pi k}{n}=0$$

が成り立つことを示せ．

【テーマ】：複素数の計算

方針

(2) では，(1) で示した等式を利用します．(3) では，複素数の相等がポイントとなります．

解答

（1） **【証明】**

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= \cos\alpha\cos\beta+i\cos\alpha\sin\beta+i\sin\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\\ &= \cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)\end{aligned}$$

ゆえに，示された． **（証明終）**

（2） **【証明】**

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= \sum_{k=1}^{n}\left(\cos\frac{2\pi k}{n}+i\sin\frac{2\pi k}{n}\right)\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(\cos\frac{2\pi(k+1)}{n}+i\sin\frac{2\pi(k+1)}{n}\right) \quad (\because\ (1))\\ &= \sum_{k=2}^{n+1}\left(\cos\frac{2\pi k}{n}+i\sin\frac{2\pi k}{n}\right) \qquad \cdots\cdots (*)\\ &= z+\left(\cos\frac{2\pi(n+1)}{n}+i\sin\frac{2\pi(n+1)}{n}\right)-\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)\end{aligned}$$

ここで，

$$\cos\frac{2\pi(n+1)}{n}=\cos\left(2\pi+\frac{2\pi}{n}\right)=\cos\frac{2\pi}{n}$$
$$\sin\frac{2\pi(n+1)}{n}=\sin\left(2\pi+\frac{2\pi}{n}\right)=\sin\frac{2\pi}{n}$$

であるから，

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= z + \left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right) - \left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)\\ &= z\end{aligned}$$

ゆえに，示された．　**（証明終）**

（3）**【証明】**

(2) より，$z\left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n} - 1\right) = 0$ であり，$n \geqq 2$ より，

$$0 < \frac{2\pi}{n} \leqq \pi$$

であるから，$\cos\frac{2\pi}{n} \neq 1$ である．したがって，

$$\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n} - 1 \neq 0$$

となるので，$z = 0$ である．すなわち，

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}\right) = 0 \iff \sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2\pi k}{n} + i\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{2\pi k}{n} = 0$$

であり，$\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2\pi k}{n}$，$\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{2\pi k}{n}$ はともに実数，i は虚数単位であるから，

$$\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2\pi k}{n} = \sum_{k=1}^{n}\sin\frac{2\pi k}{n} = 0$$

が成り立つ．ゆえに，示された．　**（証明終）**

◇　♡

解説

(1) で，$\cos\alpha + i\sin\alpha$ とありますが，これは複素数の表現方法の一つで『極形式』といいます．極形式を用いた計算は非常に便利なことが多いので，大切な表現方法なのです．(1) では，三角関数の加法定理の逆を用いて証明をし，(2) では，(1) を利用した後，z を作るため (∗) のような変形を行います．その後 z を作り不要なものを削除したり余ったものを加えたりして調整し，端数の部分が消えることを証明します．(3) では，次の複素数の相等関係を用いて証明をしています．

複素数の相等 … a, b, c, d は実数とする

$$\begin{cases} a + bi = c + di & \text{は } a = c,\ b = d \text{ のときに限り成り立つ.}\\ a + bi = 0 & \text{は } a = b = 0 \text{ のときに限り成り立つ.}\end{cases}$$