29 （'01　広島大）　**【難易度】** … 基本

次のそれぞれの問いに答えよ．

（1）　行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ が $AB=O$ を満たすとき，行列 A の 4 つの成分の積 $abcd$ は正または 0 であることを示せ．

（2）　行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が逆行列を持たず，3 つの成分が正であるとき，残りの 1 つの成分も正であることを示せ．

（3）　A, B を 2×2 行列とする．$AB=O$ かつ $B \neq O$ ならば，A の逆行列 A^{-1} は存在しないことを示せ．

【テーマ】：行列と整数問題

方針

(1) は，成分を計算し $abcd$ を求めます．(2) は，逆行列を持たない条件から示します．(3) は，背理法を用いて示します．

♣ ♠

解答

（1）　**【証明】**

$$AB=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4a+2b & 2a+b \\ 4c+2d & 2c+d \end{pmatrix}$$

$AB=O$ より，

$$\begin{cases} 4a+2b=0 \\ 2a+b=0 \\ 4c+2d=0 \\ 2c+d=0 \end{cases} \qquad \therefore \begin{cases} b=-2a \\ d=-2c \end{cases}$$

よって，$abcd=a(-2a)c(-2c)=4a^2c^2 \geqq 0$ となり，示された．　**（証明終）**

（2）　**【証明】**

A^{-1} が存在しないので，$\Delta(A)=0$ すなわち $ad-bc=0$ が成り立つ．ここで，$a>0, b>0, c>0$ のとき，

$$d=\frac{bc}{a}>0$$

となるので，残りの成分も正となる．これは，どの 3 つの成分を正にしても同じであるから，題意は示された．

（証明終）

（3）　**【証明】**

A^{-1} が存在すると仮定すると，$AB=O$ の左から A^{-1} をかけて，

$$A^{-1}AB=A^{-1}O \quad \text{すなわち} \quad B=O$$

となり，$B \neq O$ に矛盾する．したがって，A^{-1} は存在しないことが示された．　**（証明終）**

♢ ♡

解説

行列に関する基本的な知識や処理方法が理解できているかどうかを問う問題です．(1) では，成分計算力．(2) では，逆行列に関する知識．(3) は，頻出の背理法を用いた逆行列が存在しない証明が問われています．

行列は，『計算がメインの問題（累乗計算など）』・『証明がメインの問題』が頻出です．行列が頻出の大学では，これらの問題をしっかりと演習しておきましょう．