28 （'10　群馬大）　【難易度】 … 標準

(1)　n を自然数とし，$\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする．

(ア)　$10^n < \left(\dfrac{5}{2}\right)^m$ を満たす自然数 m に対し，$5n < 2m$ を証明せよ．

(イ)　$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n < \dfrac{1}{5000} < \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}$ を満たす n を求めよ．

(2)　実数 x, y が連立不等式

$$4x - 3y \geqq 1, \quad -2x + 6y \geqq 1$$

を満たすとき，$\log_8(4^x + 8^y)$ の最小値を求めよ．

【テーマ】：指数不等式と領域の最大最小

方針

(1) は常用対数をとって考えます．(2) は，領域を図示し指数関数の単調増加性を利用して最小値を求めます．

♣　♠

解答

(1)　(ア)　**【証明】**

$10^n < \left(\dfrac{5}{2}\right)^m$ の両辺に常用対数をとると，

$$\log_{10} 10^n < \log_{10}\left(\frac{5}{2}\right)^m$$

$$n < \log_{10}\left(\frac{10}{2^2}\right)^m = m(1 - 2\log_{10} 2)$$

よって，

$$\begin{aligned} 2m - 5n &> 2m - 5m(1 - 2\log_{10} 2) \\ &= m(-3 + 10\log_{10} 2) \\ &= m(\log_{10} 2^{10} - \log_{10} 10^3) \\ &= m(\log_{10} 1024 - \log_{10} 1000) > 0 \end{aligned}$$

ゆえに，示された．　**（証明終）**

(2)　与えられた不等式の各辺に常用対数をとると，

$$\log_{10}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n < \log_{10}\frac{1}{5000} < \log_{10}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}$$

$$n\log_{10}\frac{\sqrt{3}}{2} < \log_{10}\frac{2}{10000} < (n-1)\log_{10}\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cdots\cdots ①$$

ここで，

$$\log_{10}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\log_{10} 3 - \log_{10} 2 = \frac{1}{2} \times 0.4771 - 0.3010 = -0.06245$$

$$\log_{10}\frac{2}{10000} = \log_{10} 2 - \log_{10} 10^4 = 0.3010 - 4 = -3.699$$

であるから，① 式は次のようになる．

$$-0.06245 \times n < -3.699 < -0.06245 \times (n-1)$$

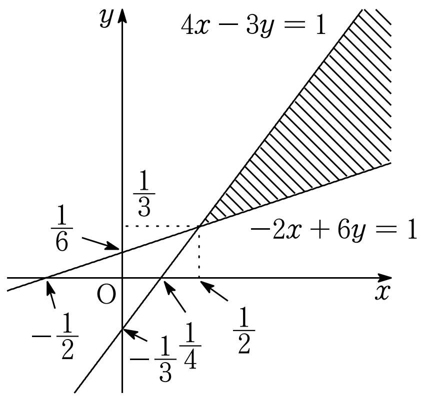
$$\frac{3.699}{0.06245} < n < \frac{3.76145}{0.06245}$$

$$59.2\cdots < n < 60.2\cdots$$

ゆえに，求める n の値は，$\boldsymbol{n = 60}$……(**答**)

(3)　与えられた連立不等式を満たす領域は，右図斜線部分で境界線上の点を含むところである．
ここで，x を固定して考えると，y が増加するとき，8^y は増加するので，$\log_8(4^x + 8^y)$ の最小値は，$y = \dfrac{1}{3}$ のときであり，$\log_8(4^x + 8^{\frac{1}{3}})$ は x について単調に増加するので，$x = \dfrac{1}{4}$ のとき，最小値をとる．
よって，求める最小値は，

$$\log_8(4^{\frac{1}{2}} + 8^{\frac{1}{3}}) = \log_8 4 = \boldsymbol{\frac{2}{3}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$



◇　♡

解説

独立小問の問題なので，特に問題間での関連はありません．

(1) は，常用対数をとり，n を m を用いて表します．不等式の証明の基本は，大きい方から小さい方を引いて正を示すことなので，基本通りに証明を行えばできます．

(2) は，常用対数をとって対数の計算を地道に行います．小数計算があるので，計算間違いに注意しましょう．

(3) は，$\log_8(4^x + 8^y) = k$ とおくと，$y = \log_8(-4x^k + 8^k)$ となり，グラフがかけなくなるため別の方法を考える必要があります．ここでは，2 変数の最大値・最小値を求める際の考え方『1 文字固定』と指数関数の単調増加性を利用して求めます．