27 （'09 埼玉大） 【難易度】… 標準

次の問いに答えよ．

（1） 定積分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}\,dt$ を求めよ．

（2） 不等式 $x^2+y^2+\log(1+z^2) \leqq \log 2$ の定める立体の体積を求めよ．

【テーマ】：立体の体積

方針

(1) は置換積分法を利用します．(2) は平面 $z=t$ による切り口の面積を求めて，それを積分することで体積を計算します．

♣ ♠

解答

(1)

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= \int_0^1 \frac{1+t^2-1}{1+t^2}\,dt \\
&= \int_0^1 \left(1-\frac{1}{1+t^2}\right) dt \\
&= 1-\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt
\end{aligned}
$$

ここで，$t=\tan\theta$ とおくと，$dt=\dfrac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta$ であるから，

$$
\begin{aligned}
(\text{与式}) &= 1-\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta \\
&= 1-\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \\
&= \mathbf{1-\frac{\pi}{4}} \cdots\cdots(\textbf{答})
\end{aligned}
$$

(2) 与えられた立体の平面 $z=t$ による切断面の図形は，

$$x^2+y^2+\log(1+t^2) \leqq \log 2 \iff x^2+y^2 \leqq \log 2-\log(1+t^2)$$

より，原点を中心とした半径 $\sqrt{\log 2-\log(1+t^2)}$ の円板となる．ゆえに，その面積 $S(t)$ は，

$$S(t)=(\log 2-\log(1+t^2))\pi$$

である．ただし，$-1 \leqq t \leqq 1$ である．ゆえに，求める立体の体積 V は，

$$
\begin{aligned}
V &= \pi\int_{-1}^1 (\log 2-\log(1+t^2))\,dt \\
&= 2\pi\int_0^1 (\log 2-\log(1+t^2))\,dt \\
&= 2\pi\left\{\log 2-\left(\Big[\,t\log(1+t^2)\Big]_0^1-\int_0^1 \frac{2t^2}{1+t^2}\,dt\right)\right\} \\
&= 2\pi\left\{\log 2-\log 2+2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\right\} \quad (\because\ (1)) \\
&= \boldsymbol{\pi(4-\pi)} \cdots\cdots(\textbf{答})
\end{aligned}
$$

◇ ♡

$\boxed{\text{解説}}$

(1) は，(2) での計算のヒントなのでミスなくこなしたいところです．

(2) の体積計算ですが，立体を想像するとよくわからなくなることが多いので，平面による切り口を考えます．ここでは，x^2+y^2 という形を一塊とみて考えれば円になりそうだと予想できますから $z=t$ での切り口を考えました．また，t のとり得る範囲ですが，円の半径が 0 以上にならなければならないので，

$$\log 2-\log(1+t^2) \geqq 0 \text{ すなわち } -1 \leqq t \leqq 1$$

を得ます．これは，切り口が存在する範囲を表しているので，積分区間になります．

このような問題は，ある程度経験をしておかなければ本番で，すらすら解けないでしょうから，多くの類題を解いておきましょう．