26 （'01　東京水産大） 【難易度】 … 標準

初項 $a_1 = p$（p は自然数）と漸化式

$$a_{n+1} = (n+1)\left[\frac{a_n}{n+1}\right] \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

できまる数列 $\{a_n\}$ について，以下の問いに答えよ．ただし，$[\,x\,]$ は x を超えない最大の整数を表す．例えば，$[\,4\,] = 4$，$\left[\frac{5}{2}\right] = 2$，$\left[\frac{1}{3}\right] = 0$，$[\,0\,] = 0$ である．

（1）　$p = 21$ のとき，a_5 を求めよ．

（2）　$n \geqq 1$ のとき，$0 \leqq a_{n+1} \leqq a_n$ を示せ．

（3）　$a_5 = a_1$ となるための p の条件を求めよ．

（4）　p より大きい自然数 n に対し，$a_n = 0$ となることを示せ．

【テーマ】：ガウス記号を含んだ漸化式

方針

(1) は具体的に計算をして求めます．(2) は数学的帰納法とガウス記号の性質から示せます．(3), (4) は (2) の結果を利用して示します．

♣　♠

解答

（1）　$a_1 = 21$ のとき，与えられた漸化式から，

$$a_2 = 2\left[\frac{21}{2}\right] = 2\times 10 = 20 \qquad a_3 = 3\left[\frac{20}{3}\right] = 3\times 6 = 18$$

$$a_4 = 4\left[\frac{18}{4}\right] = 4\times 4 = 16 \qquad a_5 = 5\left[\frac{16}{5}\right] = 5\times 3 = \mathbf{15}\text{……(答)}$$

（2）　**【証明】**

まず，$a_n \geqq 0$ を示す．

（i）　$n = 1$ のとき，$a_1 = p > 0$ より，成り立つ．

（ii）　$n = k$ のとき，$a_k \geqq 0$ であると仮定すると，

$$a_{k+1} = (k+1)\left[\frac{a_k}{k+1}\right] \geqq 0$$

となり，$n = k+1$ のときも成り立つ．よって，数学的帰納法により示された．　**（証明終）**

次に $a_{n+1} \leqq a_n$ を示す．

【証明】

一般に，

$$\left[\frac{a_n}{n+1}\right] \leqq \frac{a_n}{n+1}$$

が成り立つので，両辺を $n+1$ 倍して，

$$(n+1)\left[\frac{a_n}{n+1}\right] \leqq a_n \quad \text{すなわち} \quad a_{n+1} \leqq a_n$$

よって，示された．　**（証明終）**

(3) (2) より，$a_5 = a_1$ となるためには，

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 \text{ すなわち } p = 2\left[\frac{p}{2}\right] = 3\left[\frac{p}{3}\right] = 4\left[\frac{p}{4}\right] = 5\left[\frac{p}{5}\right]$$

が成り立てばよい．よって，

$$\left[\frac{p}{2}\right] = \frac{p}{2},\ \left[\frac{p}{3}\right] = \frac{p}{3},\ \left[\frac{p}{4}\right] = \frac{p}{4},\ \left[\frac{p}{5}\right] = \frac{p}{5}$$

が成り立つので，p は 2, 3, 4, 5 の公倍数となる．ゆえに，求める p の条件は，**p は 60 の倍数**……(**答**)

(4) **【証明】**

(2) より，$0 \leqq a_{n+1} \leqq a_n$ であるから，

$$0 \leqq a_n \leqq a_{n-1} \leqq \cdots\cdots \leqq a_1 = p$$

である．よって，$p < n$ のとき，

$$0 \leqq a_{n-1} < n \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \leqq \frac{a_{n-1}}{n} < \frac{n}{n} = 1$$

であるから，$\left[\dfrac{a_{n-1}}{n}\right] = 0$ となる．ゆえに，$a_n = 0$ が示された．

◇ ♡

解説

(1) は，ガウス記号の意味が理解できていれば単なる計算問題です．

(2) は，前半は数学的帰納法で示し，後半はガウス記号の性質を用いて示します．ガウス記号の性質とは次のようなもので，解答ではその一部を利用しました．

参考 **【ガウス記号の性質】**

一般に，実数 x に対して，$[\,x\,]$ が x を超えない最大の整数を表すとき，次式が成り立つ．

(i) $x - 1 < [\,x\,] \leqq x$

(ii) $[\,x\,] \leqq x < [\,x\,] + 1$

これら 2 式は，同値なので一方をきちんと覚えて，他方は導けるようにしておきましょう．

(3) は，$a_5 = a_1$ となるためには，$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5$ でなければならないので，これを満たすように p の条件を考えます．ガウス記号が整数を表すという点に着目すれば，p が 2, 3, 4, 5 の倍数でなければならないことがわかります．

(4) は，(2) の結果を利用して，$0 \leqq \dfrac{a_{n-1}}{n} < 1$ を示します．注意したい点は，$\dfrac{a_{n-1}}{n} \leqq 1$ のように『イコール』がついてしまうと示せないので，『イコール』がない式を書かなければいけないことです．