25 （'94　神戸大） 【難易度】 … 標準

$n=1,\,2,\,3,\,\cdots\cdots$ に対して $I(n)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$ とおくとき，次の各問いに答えなさい．

（1） 部分積分法を用いて，$I(n+2)$ と $I(n)$ の間の関係式を求めなさい．

（2） $I(2m-1)I(2m)$ を求めなさい．

（3） $k \geqq n$ ならば $I(k) \leqq I(n)$ となることを示しなさい．

（4） $\lim_{n\to\infty} I(n)=0$ であることを示しなさい．

【テーマ】：定積分と極限

方針

漸化式を求めるので，部分分数分解を利用します．(2) 以降は，前問の結果を利用しながら示していきます．

♣ ♠

解答

（1）

$$
\begin{aligned}
I(n+2) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cdot\sin^{n+1}x\,dx \\
&= \Big[-\cos x\cdot\sin^{n+1}x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\cdot(n+1)\sin^n x\cos x\,dx \\
&= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 x)\sin^n x\,dx \\
&= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^n x-\sin^{n+2}x)\,dx \\
&= (n+1)\{I(n)-I(n+2)\}
\end{aligned}
$$

$$(n+2)I(n+2)=(n+1)I(n)$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{I(n+2)=\frac{n+1}{n+2}I(n)}\cdots\cdots\textbf{（答）}$$

（2） （1）より，

$$
\begin{aligned}
I(2m-1) &= \frac{2m-2}{2m-1}I(2m-3) \\
&= \frac{2m-2}{2m-1}\cdot\frac{2m-4}{2m-3}I(2m-5) \\
&= \frac{2m-2}{2m-1}\cdot\frac{2m-4}{2m-3}\cdots\cdots\frac{2}{3}I(1) \\
I(2m) &= \frac{2m-1}{2m}I(2m-2) \\
&= \frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{2m-3}{2m-2}I(2m-4) \\
&= \frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{2m-3}{2m-2}\cdots\cdots\frac{3}{4}I(2)
\end{aligned}
$$

したがって，

$$I(2m-1)I(2m)=\frac{1}{m}I(2)I(1)$$

を得る．ここで，

$$I(1)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=\Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$$

$$I(2)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2x}{2}\,dx=\Big[\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$$

であるから，

$$I(2m-1)I(2m)=\boldsymbol{\frac{\pi}{4m}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

(3) **【証明】**

$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ で $0 \leqq \sin x \leqq 1$ であるから，$k \geqq n$ のとき，$\sin^k x \leqq \sin^n x$ が成り立つ．よって，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^k x\,dx \leqq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx \quad\Longleftrightarrow\quad I(k) \leqq I(n)$$

(証明終)

(4)

$I(n) \geqq 0$ は明らかで (2), (3) より，

$$0 \leqq \{I(2m+1)\}^2 \leqq \{I(2m)\}^2 \leqq I(2m-1)I(2m)=\frac{\pi}{4m}$$

である．$m \to \infty$ のとき，$\dfrac{\pi}{4m} \to 0$ であるから，はさみうちの原理より，

$$\lim_{m\to\infty} I(2m)=0,\quad \lim_{m\to\infty} I(2m+1)=0$$

である．ゆえに，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} I(n)=0$ が示された． **(証明終)**

◇ ♡

解説

定積分から漸化式を求める際は，部分積分を用いることが多くあります．本問もそのタイプで，この問題のポイントは，$\sin^{n+1} x=\sin x \sin^n x$ と変形することにあります．これは $\cos^{n+1} x$ についても同じです．ただし，$\tan^{n+2} x$ は少し様子が変わってきます．$\tan^{n+2} x$ の場合は，

$$\tan^{n+2} x=\tan^2 x \tan^n x=\left(1-\frac{1}{\cos^2 x}\right)\tan^n x$$

と変形して部分積分を行います．一度は，漸化式を求めておくとよいでしょう．

(2) 以降は，前問の結果を利用しますが，類題の経験がないと流れがわからないでしょう．

(2) では，$I(2m-1)$, $I(2m)$ を個別に求めて掛け算をすることで約分ができてシンプルな形になります．ただし，注意したいのは，与えられた $I(n)$ は $n=1, 2, \cdots$ で定義されているという点です．$I(0)$ は定義されていないので，$I(0)$ までずらしてしまうと，減点対象となります．(3) では，積分区間に着目して不等式を作る典型的な問題です．底が 1 より小さいので，指数部分の大小と全体の大小が逆転することに注意しましょう．(4) では，はさみうちの原理を用いますが，ここでは，(2), (3) の結果から $I(2m)$ と $I(2m+1)$ の極限を求めています．これは n が偶数のときと奇数のときの極限を計算していることになり，それらが同じ値に収束するので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} I(n)$ が存在します．もしも，$\displaystyle\lim_{m\to\infty} I(2m) \neq \lim_{m\to\infty} I(2m+1)$ となれば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} I(n)$ は存在しません．