23 （'11　大阪府立大） 【難易度】… 標準

$f(x)=e^{-x}\cos x$ とする．

(1)　$e^{-x}\sin x-e^{-x}\cos x$ を微分せよ．

(2)　定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$ を求めよ．

(3)　自然数 n に対して，$S_n=\dfrac{1}{n}\left\{f\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)+f\left(\dfrac{2\pi}{2n}\right)+f\left(\dfrac{3\pi}{2n}\right)+\cdots+f\left(\dfrac{n\pi}{2n}\right)\right\}$ とおく．次の式が成り立つことを示せ．

$$S_n<\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx<S_n+\frac{1}{n}$$

(4)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ．

【テーマ】：微積分の融合

方針

(1), (2) は，問題文にしたがうだけです．(3) では，$f(x)$ が単調減少であることと $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ を n 等分して考えます．

♣　♠

解答

(1)
$$\frac{d}{dx}(e^{-x}\sin x-e^{-x}\cos x)=-e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x+e^{-x}\cos x+e^{-x}\sin x$$
$$=\boldsymbol{2e^{-x}\cos x}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

(2)　(1) より，
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx=\left[\frac{1}{2}(e^{-x}\sin x-e^{-x}\cos x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\frac{1}{2}\left(e^{-\frac{\pi}{2}}+1\right)=\boldsymbol{\frac{e^{-\frac{\pi}{2}}+1}{2}}\cdots\cdots(\textbf{答})$$

(3)　**【証明】**

区間 $\dfrac{k-1}{2n}\pi\leqq x\leqq\dfrac{k}{2n}\pi$ で $f'(x)=-e^{-x}(\sin x+\cos x)<0$ より $f(x)$ は単調減少である．よって，
$$f\left(\frac{k}{2n}\pi\right)\leqq f(x)\leqq f\left(\frac{k-1}{2n}\pi\right)$$
である．ゆえに，
$$\int_{\frac{k-1}{2n}\pi}^{\frac{k}{2n}\pi} f\left(\frac{k}{2n}\pi\right)dx<\int_{\frac{k-1}{2n}\pi}^{\frac{k}{2n}\pi} f(x)\,dx<\int_{\frac{k-1}{2n}\pi}^{\frac{k}{2n}\pi} f\left(\frac{k-1}{2n}\pi\right)dx$$
$$\frac{\pi}{2n}f\left(\frac{k}{2n}\pi\right)<\int_{\frac{k-1}{2n}\pi}^{\frac{k}{2n}\pi} f(x)\,dx<\frac{\pi}{2n}f\left(\frac{k-1}{2n}\pi\right)$$
$k=1,2,\cdots\cdots,n$ として，辺々加えると，
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{2n}f\left(\frac{k}{2n}\pi\right)<\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{2n}\pi}^{\frac{k}{2n}\pi} f(x)\,dx<\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{2n}f\left(\frac{k-1}{2n}\pi\right)$$
$$\frac{\pi}{2n}\left\{f\left(\frac{\pi}{2n}\right)+f\left(\frac{2\pi}{2n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n\pi}{2n}\right)\right\}<\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$$
$$<\frac{\pi}{2n}\left\{f(0)+f\left(\frac{\pi}{2n}\right)+f\left(\frac{2\pi}{2n}\right)+\cdots+f\left(\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)\right\}$$

$$\frac{\pi}{2}S_n < \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx < \frac{\pi}{2}\left(S_n + \frac{1}{n}f(0) - \frac{1}{n}f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$\frac{\pi}{2}S_n < \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx < \frac{\pi}{2}\left(S_n + \frac{1}{n}\right) \qquad \left(\because\ \ f(0)=1,\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0\right)$$

$$\therefore\ \ S_n < \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx < S_n + \frac{1}{n}$$

ゆえに，示された. **(証明終)**

(4) (2), (3) より，

$$S_n < \frac{e^{-\frac{\pi}{2}}+1}{\pi} < S_n + \frac{1}{n} \iff \frac{e^{-\frac{\pi}{2}}+1}{\pi} - \frac{1}{n} < S_n < \frac{e^{-\frac{\pi}{2}}+1}{\pi}$$

$n \to \infty$ のとき，はさみうちの原理より，

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \boldsymbol{\frac{e^{-\frac{\pi}{2}}+1}{\pi}} \cdots\cdots(\textbf{答})$$

◇ ♡

解説

(2) の積分は，(1) の結果を用います．(1) がない場合は，部分積分法を用いて計算します．頻出問題なので，誘導なしでできるようにしておきましょう．

(3) は，区間 $\dfrac{k-1}{2n}\pi \leqq x \leqq \dfrac{k}{2n}\pi$ で $f(x)$ が単調減少であることを見つけます．これによって不等式が立式できます．区間を n 等分して考える部分がポイントです．

(4) は (3) の不等式からはさみうちの原理により極限を求める典型的な問題です．

本問の山場は (3) です．この問題ができるかどうかがこの問題での得点率を大きく左右します．入試では，合否を分ける部分になりますので，熟考し方針を導いてください．

